

**ver.3 - 29.09.2021**

# Série 1 – Resoluções

1

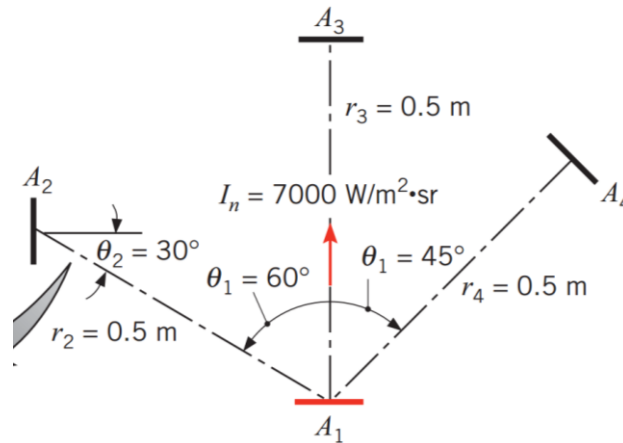
## 1.1

Conhecida a intensidade normal de emissão e que o emissor é do tipo difuso. Ou seja, a intensidade de emissão é independente de direção e portanto:

$$I = 7000 \text{ W/m}^2 \text{sr}$$

## 1.2

Desenhamos o esquema e incluímos toda a informação que conhecemos:



$$A_1 = A_2 = A_3 = A_4 = 10^{-3} \text{ m}^2$$

Podemos também assumir que o ângulo de irradiação sobre as superfícies é sempre igual, dado que a distância entre as superfícies emissoras e receptoras é relativamente grande. Ou seja, podemos assumir superfícies diferenciais:

$$\therefore r = 0.5 \text{ m}$$

$$\therefore A_2 = A_3 = A_4 = 10^{-3} \text{ m}^2$$

$$\therefore \frac{A_j^2}{r_j^2} \ll 1$$

Podemos começar por calcular os ângulos sólidos a partir da definição do ângulo sólido da superfície projetada.

$$d\omega \equiv \frac{dA_n}{r^2}$$

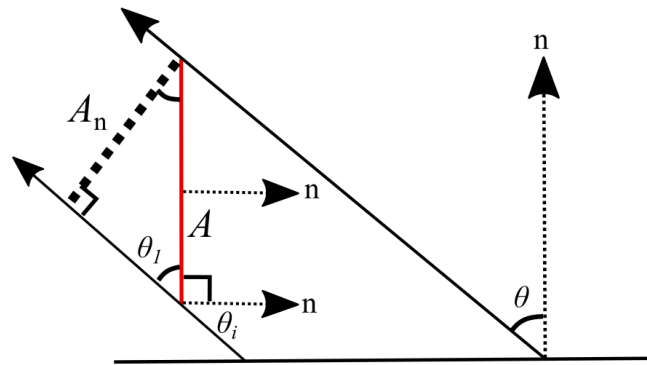
$$\therefore \omega_{j-1} = \frac{dA_{n,j}}{r_j^2}$$

## Série 1 – Resoluções

Começamos por primeiro calcular o ângulo sólido das superfícies 3 e 4 por estas serem normais à direção da radiação incidente.

$$\omega_{3-1} = \omega_{4-1} = \frac{A_3}{r_3} = \frac{A_4}{r_4} = \frac{10^{-3} \text{ m}^2}{(0.5 \text{ m})^2} = 4.00 \times 10^{-3} \text{ sr}$$

Para a superfície 2 temos que tomar em consideração que esta não é normal à direção da radiação e, portanto, teremos que calcular a área projetada (ou podem pensar como a área de sombra criada pela superfície 2)



A imagem acima demonstra o exemplo da sombra de área  $A_n$  criada pela superfície de área  $A$ . A área da sombra projetada é a área efetiva que a superfície  $A$  intercepta a radiação vinda da superfície emissora na direção  $\theta$ . Podemos trabalhar em função do ângulo de emissão (aqui na figura  $\theta$ ) ou em função do ângulo de incidência de radiação sobre a superfície  $\theta_i$  do ponto de vista da superfície.

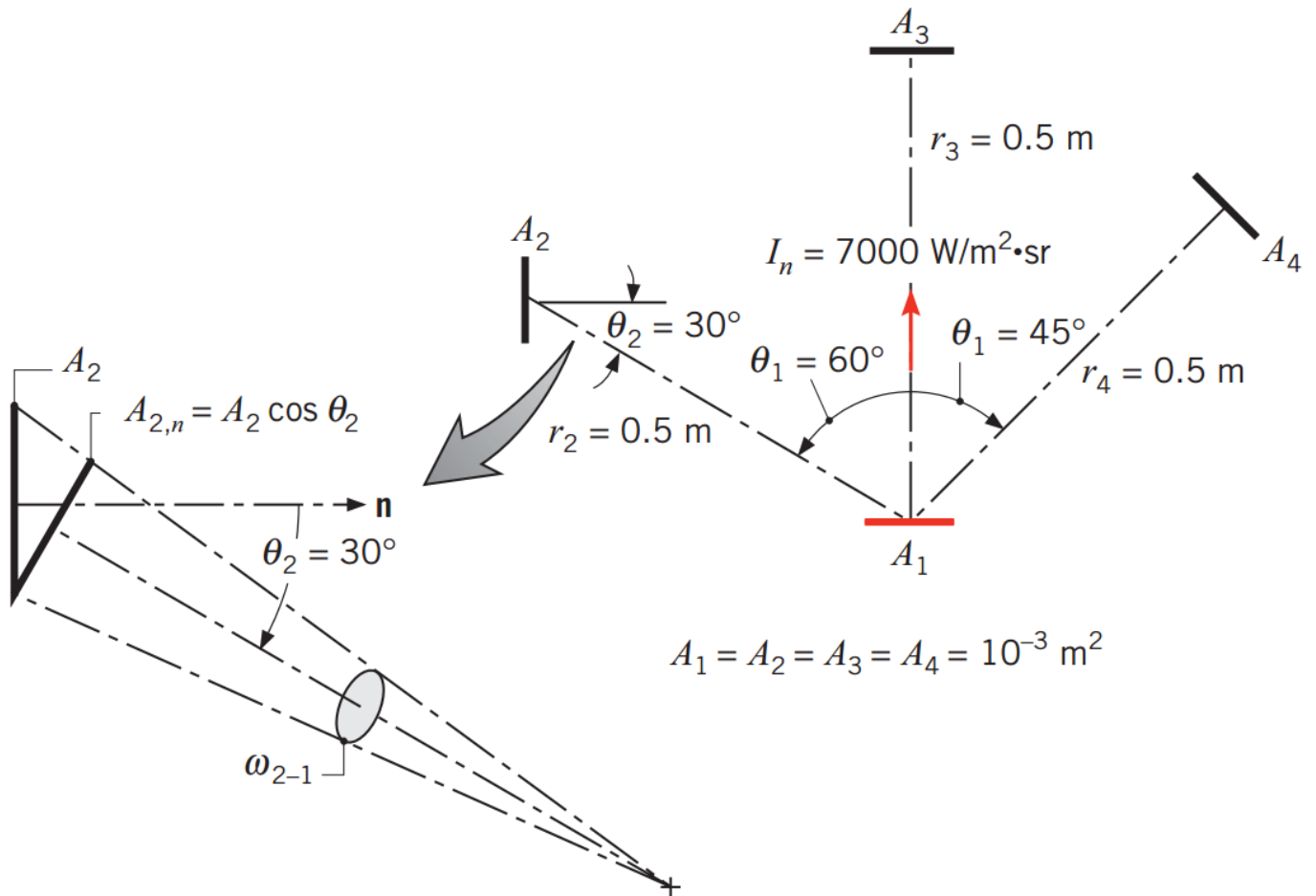
A área projetada (de sombra) é portanto:

$$\begin{aligned}\theta_1 &= \theta \\ \therefore A_n &= A \sin \theta_1 \\ \\ \because \theta_1 + \theta_i &= 90^\circ \\ \theta_1 &= 90^\circ - \theta_i \\ \therefore A_n &= A \sin \theta_1 = A \sin(90^\circ - \theta) \\ \\ \because \sin(90^\circ - \theta) &= \cos \theta \\ \therefore A_n &= A \cos \theta_i\end{aligned}$$

Voltando à figura podemos desenhar a área projetada  $A_{2,n}$  pela área  $A_2$ .

Para a superfície  $A_2$ , o ângulo de incidência sobre a superfície é de  $30^\circ$ .

## Série 1 – Resoluções



Sabendo a área projetada, o ângulo sólido é portanto:

$$\omega_{2-1} = \frac{A_{2,n}}{r_2} = \frac{A_2 \cos \theta_2}{r_2} = \frac{10^{-3} \text{ m}^2 \cos 30^\circ}{(0.5 \text{ m})^2} = 3.46 \times 10^{-3} \text{ sr}$$

### 1.3

Relembrando que definimos que a radiação a partir de uma superfície diferencial para outra superfície que projeta um ângulo sólido  $d\omega$  e que esteja numa direção  $\theta$

$$dq_\lambda = I_{\lambda,e}(\lambda, \theta, \phi) dA_1 \cos \theta \cdot d\omega$$

Aqui o  $\cos \theta$  entra novamente, porque agora estamos interessados em saber qual é a área de emissão que é projetada sobre a superfície recetora. (mais info no fim).

Ou seja, mesmo sabendo que neste caso aqui que a superfície emissora é do tipo difuso e, portanto, a intensidade de radiação é independente de direção, e que também não estamos a avaliar a intensidade espectral, podemos escrever que:

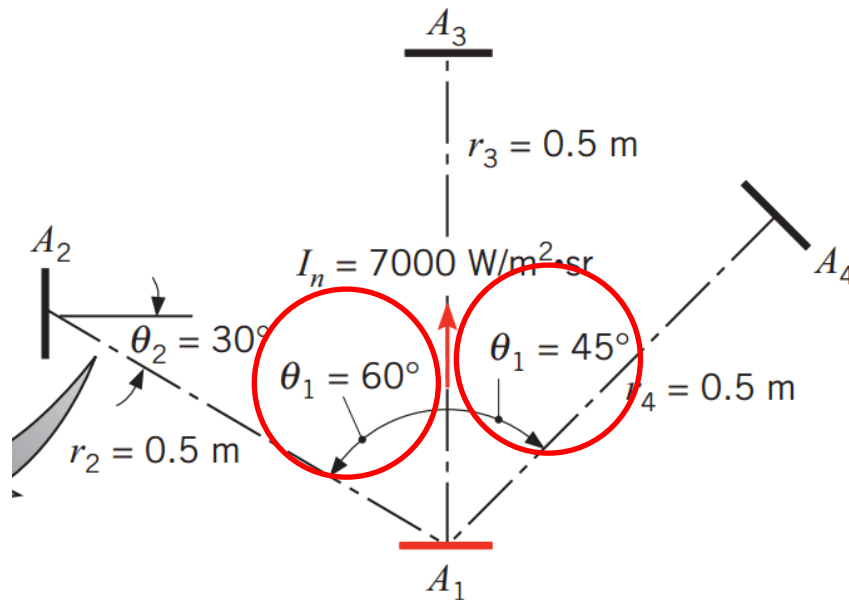
$$I_{\lambda,e}(\lambda, \theta, \phi) = I = 7000 \text{ W/m}^2 \text{ sr}$$

## Série 1 – Resoluções

Para as três superfícies a radiação intercetada na superfície  $j$  pela emissão da superfície 1 é dado por:

$$q_{1-j} = I \times dA_1 \cos \theta_1 \times d\omega_{j-1}$$

Onde  $\theta_1$  é o ângulo de emissão a partir da superfície 1 à superfície de interesse  $j$ .



Para as superfícies 2, 3 e 4:

$$q_{1-j} = I \times dA_1 \cos \theta_1 \times d\omega_{j-1}$$

$$q_{1-2} = 7000 \text{ W/m}^2\text{sr} \times 10^{-3} \text{ m}^2 \cos 60^\circ \times 3.46 \times 10^{-3} \text{ sr} \\ = 12.1 \times 10^{-3} \text{ W}$$

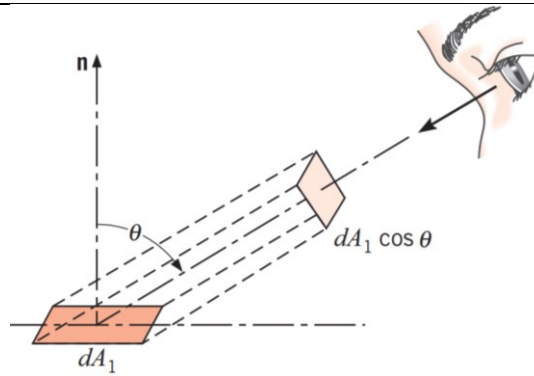
$$q_{1-3} = 7000 \text{ W/m}^2\text{sr} \times 10^{-3} \text{ m}^2 \cos 0^\circ \times 4.00 \times 10^{-3} \text{ sr} \\ = 28.0 \times 10^{-3} \text{ W}$$

$$q_{1-4} = 7000 \text{ W/m}^2\text{sr} \times 10^{-3} \text{ m}^2 \cos 45^\circ \times 4.00 \times 10^{-3} \text{ sr} \\ = 19.8 \times 10^{-3} \text{ W}$$

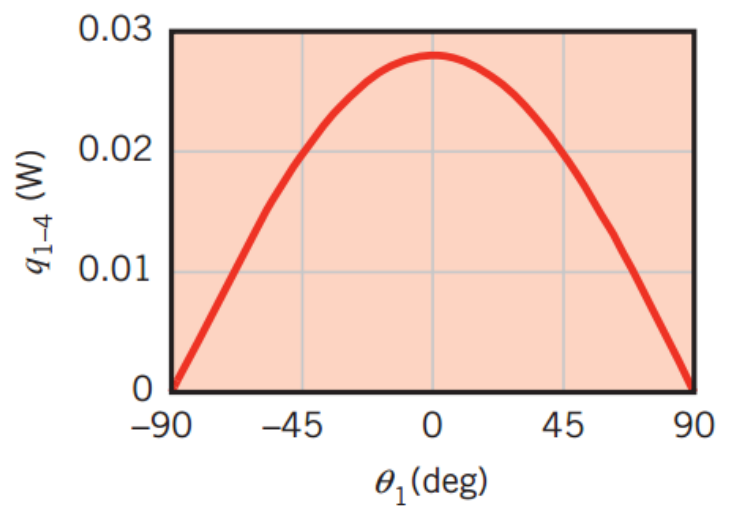
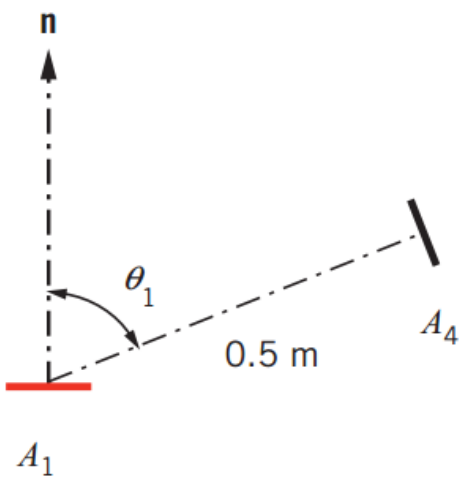
Alguns apontamentos.

Embora a intensidade de radiação  $I$  seja difusa e portanto independente de direção, o fluxo de radiação  $q_{1-j}$  das superfícies 3 e 4 difere, isto embora o ângulo sólido se mantenha sempre igual.

## Série 1 – Resoluções



Se a superfície recetora estivesse a  $90^\circ$ , então a superfície emissora seria somente uma linha do ponto de vista da superfície recetora. Podemos calcular o fluxo de radiação intercetado na superfície 4 para diferentes direções e vemos que:

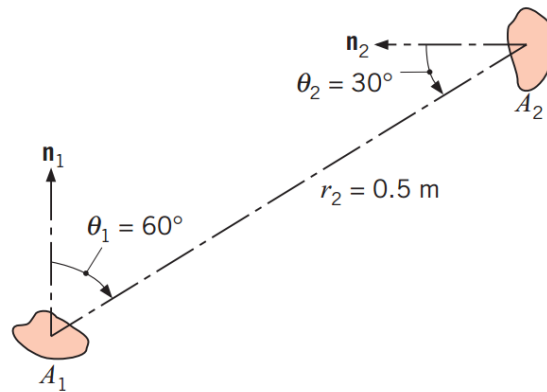


## Série 1 – Resoluções

2

### 2.1

Determinar a taxa que a radiação emitida é interceptada pela área  $A_2 = 5 \times 10^{-4} \text{ m}^2$ , que é um emissor difuso com uma potência de emissão hemisférica total de  $A = 5 \times 10^4 \text{ W/m}^2$



Podemos assumir que a emissão é difusa e que as superfícies são superfícies diferenciais  $\frac{A_2}{r_2^2} \ll 1$ .

Já conhecemos a expressão que descreve a taxa de fluxo de radiação entre duas superfícies:

$$dq_A = I_{\lambda,e}(\lambda, \theta, \phi) \times dA_1 \cos(\theta) \times d\omega$$

Usando os símbolos para a questão e tomando em consideração facto que são superfícies diferenciais.

$$q_{1-2} = I_{e,1}(\lambda, \theta, \phi) \times A_1 \cos(\theta_1) \times \omega_{2-1}$$

Analisando a expressão pelas três componentes do produto.

Como a emissão é difusa e não estamos a fazer uma análise espectral:

$$I_{e,1}(\lambda, \theta, \phi) = I_e$$

Ainda não temos a intensidade de emissão mas temos sim potência de emissão hemisférica  $E$ . Já vimos nas aulas que para uma superfície difusa, a relação entre a intensidade de emissão e a potência de emissão hemisférica é:

$$E = \pi I_e$$

Ou seja, para o nosso caso aqui podemos então escrever que a intensidade de radiação é:

## Série 1 – Resoluções

---

$$\begin{aligned}I_{e,1} &= \frac{E_1}{\pi} \\ \because E_1 &= 5 \times 10^4 \text{ W/m}^2 \\ \therefore I_{e,1} &= \frac{E_1}{\pi} = \frac{5 \times 10^4 \text{ W/m}^2}{\pi} \\ &= 1.60 \times 10^4 \text{ W/m}^2 \text{ sr}\end{aligned}$$

Reparar que a intensidade é a densidade de potência por esterradiano.

$dA_1 \cos(\theta)$  é área efetiva que a superfície recetora vê da superfície emissora. Ou seja:

$$dA_1 \cos(\theta_1) = 10^{-4} \text{ m}^2 \times \cos 60^\circ = 5 \times 10^{-5} \text{ m}^2$$

Finalmente, o ângulo sólido que a superfície 2 ocupa:

$$\omega_{2-1} = \frac{A_{2,n}}{r_2} = \frac{A_2 \cos \theta_2}{r_2} = \frac{5 \times 10^{-4} \text{ m}^2 \cos 30^\circ}{(0.5 \text{ m})^2} \text{ sr} = 1.73 \times 10^{-3} \text{ sr}$$

Ou seja, podemos agora calcular o fluxo de radiação entre as superfícies:

$$\begin{aligned}q_{1-2} &= I_{e,1}(\lambda, \theta, \varphi) \times A_1 \cos(\theta_1) \times \omega_{2-1} \\ &= \frac{5 \times 10^4 \text{ W/m}^2}{\pi \text{ sr}} \times 10^{-4} \text{ m}^2 \cos 60^\circ \times \frac{5 \times 10^{-4} \text{ m}^2 \cos 30^\circ}{(0.5 \text{ m})^2} \\ &= 1.38 \text{ mW}\end{aligned}$$

Aqui o ângulo  $\theta_2 = 30^\circ$  é o ângulo de incidência da radiação com respeito à normal da superfície 2.

### 2.2

Por definição, a irradiação é taxa a que radiação é incidente numa superfície por unidade de área da superfície:

Ou seja:

$$G = \frac{q}{A}$$

Ou seja no nosso caso:

$$\begin{aligned}G_2 &= \frac{q_{1-2}}{A_2} = \frac{1.38 \text{ mW}}{5 \times 10^{-4} \text{ m}^2} \\ &= 2.76 \text{ W/m}^2\end{aligned}$$



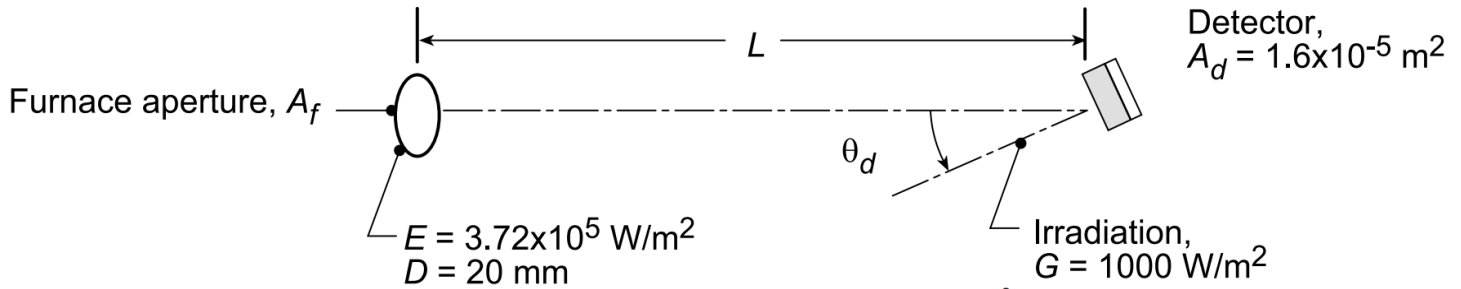
## Série 1 – Resoluções

3

### 3.1

A que distância, medida na direção normal à abertura, deve estar o sensor para receber uma irradiação de  $G = 1000 \text{ W/m}^2$  ?

Começamos por fazer a figura do problema:



O que temos de assumir:

- A abertura emite de forma difusa, ou seja, a intensidade de radiação é independente de  $\theta, \phi$ .
- Que o tamanho do detetor e distância do detetor definem que se comporte como uma superfície onde a radiação incide de forma uniforme, ou seja:  $L^2 \gg A_d$

A radiação incidente no detetor é definida como a potência de radiação incidente por unidade de área:

$$G = \frac{q_{f \rightarrow d}}{A_d}$$

A área  $A_d$  é conhecida. No entanto, falta então saber a potencia incidente sobre a superfície do detetor. Pegamos na equação que obtemos nas aulas que define o fluxo de calor sobre a superfície  $A$  em função da intensidade de radiação da superfície  $A_1$  e da distância e direção que a superfície  $A$  está em relação à superfície  $A_1$ .

$$dq_A = I_{\lambda,e}(\lambda, \theta, \phi) dA_1 \cos(\theta) d\omega$$

Queremos que densidade de potência incidente sobre a superfície seja

Analiseemos a expressão por partes.

Começando pela intensidade de radiação espectral. Está não é dada, mas o que é dado é a potência de emissão  $E = 3.72 \text{ W/m}^2$ . Como a emissão é difusa, podemos primeiro escrever que:

$$I_{\lambda,e}(\lambda, \theta, \phi) = I_{\lambda,e}(\lambda)$$

## Série 1 – Resoluções

E nas aulas mostramos que a potência total de um emissor difuso para um hemisfério é relacionada pela intensidade por: de radiação por:

$$E = \pi I_{\lambda,e}(\lambda)$$
$$\therefore I_{\lambda,e}(\lambda) = \frac{E}{\pi} = \frac{3.72 \times 10^5 \text{ W/m}^2}{\pi \text{ sr}}$$

A segunda componente da nossa equação  $dA_1 \cos(\theta)$  refere-se à área projetada.

$$dA_1 \cos(\theta) \rightarrow A_f \cos(\theta_f)$$

Como a superfície recetora está perpendicular à direcção normal de emissão o ângulo  $\theta_f$  será aqui  $0^\circ$  e, portanto:

$$\cos(\theta_f) = \cos 0^\circ = 1$$

Ou seja, a área projetada é máxima.

Para calcular a área, nós já temos o diâmetro  $D = 20\text{mm} = 0.02\text{m}$  (assumindo que é circular) e, portanto, a área emissora:

$$A_f = \pi \left( \frac{D}{2} \right)^2$$

Portanto a segunda parte na nossa equação é:

$$dA_1 \cos(\theta) \rightarrow \pi \left( \frac{D}{2} \right)^2 \cos(0^\circ) = \pi \left( \frac{D}{2} \right)^2$$

Finalmente, o ângulo sólido  $d\omega$  sabemos que é definido por:

$$d\omega \equiv \frac{dA_n}{r^2}$$

Onde o  $dA_n$  é a área efectiva (projectada) que a superfície ocupa na direcção da irradiação. Ou seja:

$$dA_n \rightarrow A_d \cos \theta_d$$

Neste primeiro caso, o detector está perpendicular à direcção da emissão e portanto:

$$\theta_d = 0^\circ$$
$$\therefore dA_n \rightarrow A_d \cos \theta_d = A_d$$

E como é obvio que a distância:

$$r \rightarrow L$$

## Série 1 – Resoluções

---

Ora é esta a distância que queremos saber para que a irradiação sobre o detector seja os  $G = 1000 \text{ W/m}^2$ .

A nossa expressão de início:

$$dq_A = I_{\lambda,e}(\lambda, \theta, \phi) dA_1 \cos(\theta) d\omega$$

Passou para:

$$dq_A \rightarrow GA_d$$

$$I_{\lambda,e}(\lambda, \theta, \phi) \rightarrow I_{\lambda,e}(\lambda) \rightarrow \frac{E}{\pi}$$

$$dA_1 \cos(\theta) \rightarrow A_f = \pi \left(\frac{D}{2}\right)^2$$

$$d\omega \rightarrow \frac{A_d}{L^2}$$

$$dq_A = \frac{E}{\pi} \frac{\pi}{4} D^2 \frac{A_d}{L^2} = E \left(\frac{D}{2}\right)^2 \frac{A_d}{L^2}$$

Finalmente, e voltando ao princípio, como:

$$G = \frac{dq_{f-d}}{A_d}$$

Ou seja:

$$G = E \left(\frac{D}{2}\right)^2 \frac{1}{L^2}$$

Tudo nesta expressão é conhecido, excepto a distância a que o detector tem que estar para que a irradiação seja o pedido. Ou seja:

$$L = \sqrt{\frac{E \left(\frac{D}{2}\right)^2}{G}}$$

$$E = 3.72 \times 10^5 \text{ W/m}^2$$

$$D = 0.02 \text{ m}$$

$$G = 1000 \text{ W/m}^2$$

$$L = \sqrt{\frac{3.72 \times 10^5 \text{ W/m}^2 \left(\frac{0.02 \text{ m}}{2}\right)^2}{1000 \text{ W/m}^2}}$$
$$= 0.193 \text{ m}$$

## Série 1 – Resoluções

---

### 3.2

Qual é a irradiação se o sensor for desviado de um ângulo de  $\theta_d = 20^\circ$  relativamente à normal?

Neste caso aqui o detetor mantém-se à distância anteriormente calculada. No entanto, está é rodada para que a radiação agora incidente sobre ela está a  $20^\circ$  do normal do detetor.

Voltemos à expressão geral inicial que define em como o fluxo de calor radiativo depende da intensidade de radiação, e posicionamento da superfície recetora.

$$dq_A = I_{\lambda,e}(\lambda, \theta, \phi) dA_1 \cos(\theta) d\omega$$

Como queremos a densidade de potência, então:

$$G = \frac{dq_A}{A}$$

Ou seja, a nossa expressão geral torna-se:

$$G = \frac{dq_A}{A} = I_{\lambda,e}(\lambda, \theta, \phi) dA_1 \cos(\theta) d\omega$$

No nosso caso:

$$\frac{dq_A}{A} \rightarrow \frac{q_{f \rightarrow d}}{A_d} = G$$

E a intensidade de irradiação:

$$I_{\lambda,e}(\lambda, \theta, \phi) = I_{\lambda,e}(\lambda) = \frac{E}{\pi}$$

E a área projetada pela superfície da abertura do forno sobre o detetor:

$$dA_1 \cos(\theta) \rightarrow \pi \left( \frac{D}{2} \right)^2 \cos \theta_f$$

E como  $\theta_f = 0^\circ$

$$dA_1 \cos(\theta) \rightarrow \pi \left( \frac{D}{2} \right)^2$$

E finalmente como o detetor está rodado, a sombra que criará é menor, ou seja, o ângulo sólido que irá criar é menor:

$$d\omega = \frac{dA_n}{r^2} \rightarrow \omega_{d \rightarrow f} = \frac{A_{d,n}}{L^2} = \frac{A_d \cos \theta_2}{L^2}$$

Já temos tudo para poder calcular o valor da densidade de irradiação sobre o detetor:

## Série 1 – Resoluções

---

$$\begin{aligned} G &= \frac{dq_A}{A} \rightarrow \frac{q_{f \rightarrow d}}{A_d} = \frac{\frac{E}{\pi} \pi \left(\frac{D}{2}\right)^2 \frac{A_d \cos \theta_2}{L^2}}{A_d} = E \left(\frac{D}{2}\right)^2 \frac{\cos \theta_2}{L^2} \\ &= 3.72 \times 10^5 \text{ W/m}^2 \left(\frac{0.02\text{m}}{2}\right)^2 \frac{\cos 20^\circ}{(0.193\text{m})^2} \\ &= 940 \text{ W/m}^2 \end{aligned}$$

No entanto, deve ser obvio que mantendo tudo igual, excepto o ângulo a que o detector está, que a densidade de radiação incidente sobre o detector varia do máximo na normal com  $\cos \theta_2$ . Ou seja,

$$\begin{aligned} G(\theta_2) &= G_{\theta_2=0^\circ} \cos \theta_2 = 1000 \text{ W/m}^2 \cos 20^\circ \\ &= 940 \text{ W/m}^2 \end{aligned}$$

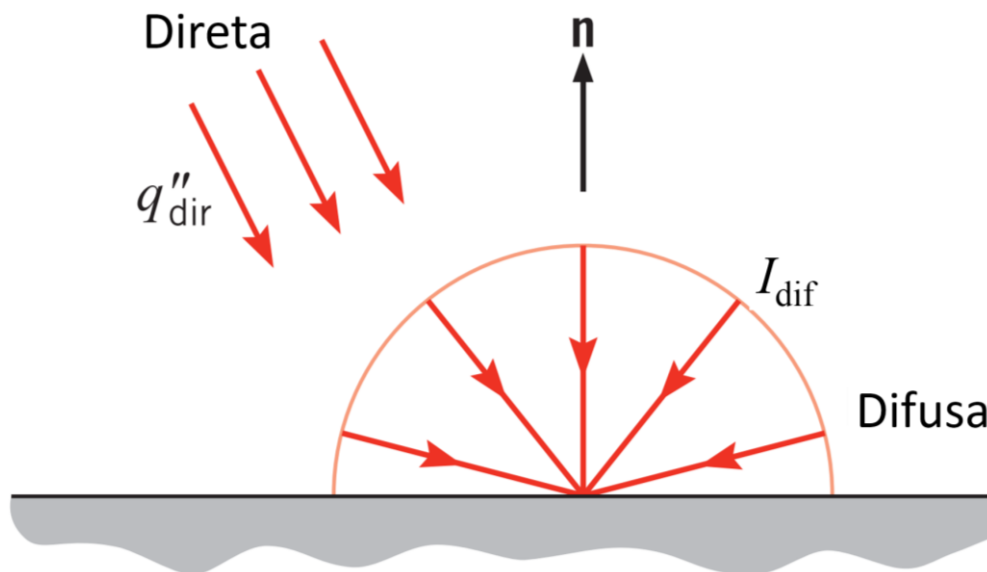
E quando o detector está  $90^\circ$ , a irradiação incidente será 0.

## Série 1 – Resoluções

4

### 4.1

Qual a irradiação total na superfície?



A irradiação incidente sobre a superfície é a soma da radiação direta e difusa:

$$G = G_{\text{dir}} + G_{\text{dif}}$$

Começemos com a componente difusa. É-nos dado que a sua intensidade é:

$$I_{\text{dif}} = 70 \frac{W}{m^2 \cdot \text{sr}}$$

Como a radiação incidente é difusa, é então independente de direcção e portanto podemos utilizar a simples relação:

$$E = \pi I_e$$

Esta expressão também é verdade para a potência de emissão sobre uma superfície e portanto podemos escrever:

$$E = \pi I_e$$

$$G = \pi I_i$$

$$\therefore G_{\text{dif}} = \pi I_{\text{dif}}$$

$$\therefore G_{\text{dif}} = \pi \cdot \text{sr} \times 70 \frac{W}{m^2 \cdot \text{sr}} = 220 \frac{W}{m^2}$$

A componente direta é dada como:

## Série 1 – Resoluções

---

$$q_{dir}^n = 1000 \text{ W/m}^2$$

É importante compreender que esta é a potência incidente para uma superfície que esta normal à direcção da radiação. A nossa superfície está na horizontal, de forma que a radiação é incidente a  $30^\circ$  da normal da superfície, e portanto:

$$\begin{aligned} G_{dir} &= q_{dir}^n \cos \theta \\ &= 1000 \text{ W/m}^2 \times \cos 30^\circ \\ &= 1000 \text{ W/m}^2 \times 0.87 = 870 \text{ W/m}^2 \end{aligned}$$

A irradiação total incident, sendo a soma da directa e da difusa é portanto:

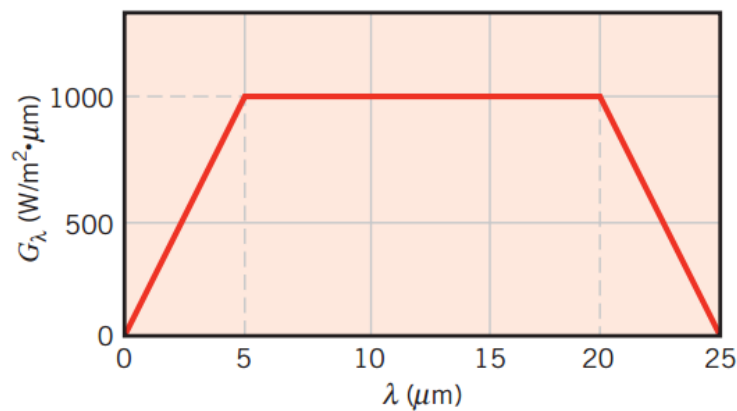
$$\begin{aligned} G &= G_{dir} + G_{dif} \\ &= 870 \text{ W/m}^2 + 220 \text{ W/m}^2 \\ &= 1090 \text{ W/m}^2 \end{aligned}$$

## Série 1 – Resoluções

5

O que temos: A radiação espectral.

O que queremos: A radiação total.



Com a radiação espectral, a radiação total é simplesmente a integral:

$$G = \int_0^{\infty} G_\lambda(\lambda) d\lambda$$

Neste caso aqui temos a radiação espectral dividido em 4 zonas:

$$0\mu\text{m} \rightarrow 5\mu\text{m}$$

$$0\mu\text{m} \rightarrow 20\mu\text{m}$$

$$20\mu\text{m} \rightarrow 25\mu\text{m}$$

$$25\mu\text{m} \rightarrow \infty$$

Reparem que deveremos sempre integrar até infinito, embora aqui não alterará a resposta final. Com as 4 zonas de comprimento de onda definidas, assim temos 4 integrais para somar.

$$G = \int_0^{5\mu\text{m}} G_\lambda d\lambda + \int_{5\mu\text{m}}^{20\mu\text{m}} G_\lambda d\lambda + \int_{20\mu\text{m}}^{25\mu\text{m}} G_\lambda d\lambda + \int_{25\mu\text{m}}^{\infty} G_\lambda d\lambda$$

São dois triângulos, um retângulo com área finita e outro retângulo com área zero.

$$\int_0^{5\mu\text{m}} G_\lambda d\lambda = \frac{1}{2} 1000 \text{ W/m}^2 \cdot \mu\text{m} \times (5\mu\text{m} - 0)$$

$$\int_{5\mu\text{m}}^{20\mu\text{m}} G_\lambda d\lambda = 1000 \text{ W/m}^2 \cdot \mu\text{m} \times (20\mu\text{m} - 5\mu\text{m})$$

$$\int_{20\mu\text{m}}^{25\mu\text{m}} G_\lambda d\lambda = \frac{1}{2} 1000 \text{ W/m}^2 \cdot \mu\text{m} \times (25\mu\text{m} - 20\mu\text{m})$$

$$\int_{25\mu\text{m}}^{\infty} G_\lambda d\lambda = 0$$



## Série 1 – Resoluções

---

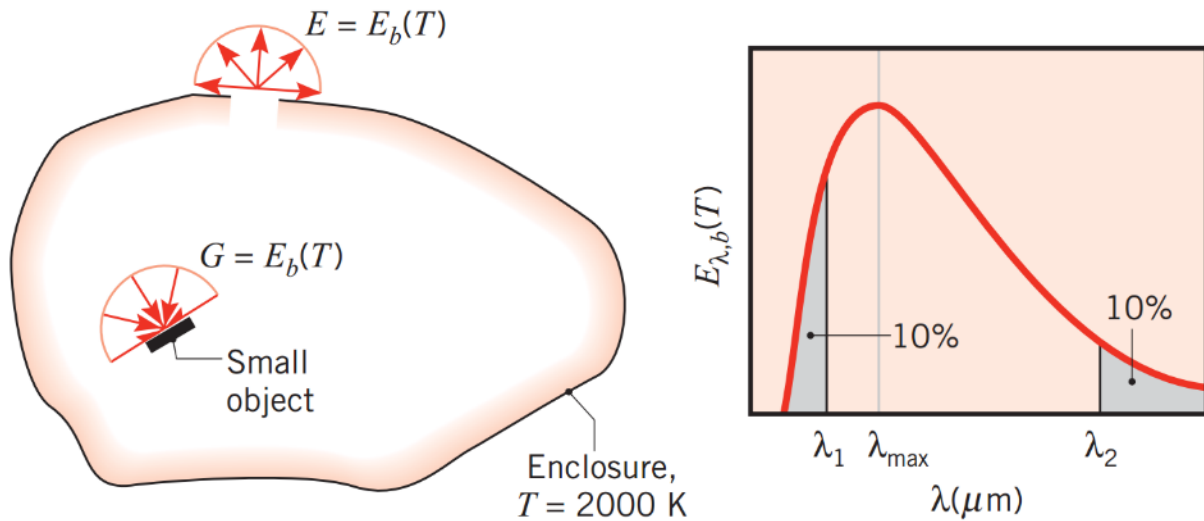
Ou seja:

$$\begin{aligned}\int_0^{\infty} G_{\lambda} d\lambda &= \frac{1}{2} 1000 \text{ W/m}^2 \cdot \mu\text{m} \times (5-0) \mu\text{m} + 1000 \text{ W/m}^2 \cdot \mu\text{m} \times (20-5) \mu\text{m} + 0 \\ &= (2500 + 15000 + 2500) \text{ W/m}^2 \\ &= 20 \text{ kW/m}^2\end{aligned}$$

# Série 1 – Resoluções

6

Primeiro temos de fazer um esquema para visualizar o problema.



Vamos assumir que as áreas da abertura e do objeto dentro da cavidade são pequenas quando comparado com a superfície interna da cavidade.

## 6.1

A emissão de qualquer abertura de uma cavidade terá o espectro de um corpo negro. Ou seja, a potência de emissão será dada pela integral da equação de Planck, ou seja, a Lei de Stefan-Boltzmann:

$$\begin{aligned} E &= E_b(T) = \sigma T^4 \\ T &= 2000\text{K} \\ \sigma &= 5.67 \times 10^{-8} \text{ W/m}^2\text{K}^4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E &= 5.67 \times 10^{-8} \text{ W/m}^2\text{K}^4 \times (2000\text{K})^4 \\ &= 9.07 \times 10^5 \text{ W/m}^2 \end{aligned}$$

## 6.2

$\lambda_1$  corresponde ao comprimento de onda superior para a banda de emissão  $0 \rightarrow \lambda_1$  que contém 10% de potência de emissão espectral. Ou seja, se formos à tabela temos de encontrar a correspondência para a função  $F_{0 \rightarrow \lambda_1}$ . No entanto, a tabela utiliza unidades de  $\lambda T$ . Consultando a tabela:

## Série 1 – Resoluções

---

$\lambda T$ ( $\mu\text{m} \cdot \text{K}$ )	$F_{(0 \rightarrow \lambda)}$
200	0.000000
400	0.000000
600	0.000000
800	0.000016
1,000	0.000321
1,200	0.002134
1,400	0.007790
1,600	0.019718
1,800	0.039341
2,000	0.066728
2,200	0.100888
2,400	0.140256
2,600	0.183120
2,800	0.227897

Vemos que  $F_{0 \rightarrow \lambda_1} \approx 0.1 = 10\%$  quando  $\lambda T = 2200 \mu\text{m} \cdot \text{K}$ .

Como temos a temperatura a que ocorre a emissão, ou seja  $T = 2000\text{K}$  podemos obter o comprimento de onda:

$$\because \lambda T = 2200 \mu\text{m} \cdot \text{K}$$

$$\because T = 2000\text{K}$$

$$\lambda = \frac{2200 \mu\text{m} \cdot \text{K}}{2000\text{K}} = 1.1 \mu\text{m}$$

### 6.3

$\lambda_1$  corresponde ao limite inferior da banda de emissão de interesse entre  $\lambda_2 \rightarrow \infty$  que contem 10% do total de emissão. Ou seja, entre  $0 \rightarrow \lambda_2$  deve conter 90% da emissão espectral. Ou seja, podemos então escrever que:

$$\because F_{\lambda_1 \rightarrow \infty} = 100\% - F_{0 \rightarrow \lambda_2}$$

$$\because F_{\lambda_1 \rightarrow \infty} = 10\%$$

$$F_{0 \rightarrow \lambda_2} = 100\% - F_{\lambda_1 \rightarrow \infty} = 90\%$$

Ou seja, para encontrar  $F_{\lambda_1 \rightarrow \infty}$ , temos que avaliar  $F_{0 \rightarrow \lambda_2}$  a partir da tabela:

## Série 1 – Resoluções

---

$\lambda T$ ( $\mu\text{m} \cdot \text{K}$ )	$F_{(0 \rightarrow \lambda)}$
6,600	0.783199
6,800	0.796129
7,000	0.808109
7,200	0.819217
7,400	0.829527
7,600	0.839102
7,800	0.848005
8,000	0.856288
8,500	0.874608
9,000	0.890029
9,500	0.903085
10,000	0.914199
10,500	0.923710
11,000	0.931890

Vemos que para  $F_{0 \rightarrow \lambda_2} \approx 0.9 = 90\%$ ,  $\lambda T = 9500 \mu\text{m} \cdot \text{K}$ . Como temos a temperatura a que ocorre a emissão, ou seja  $T = 2000\text{K}$  podemos obter o comprimento de onda:

$$\therefore \lambda T = 9500 \mu\text{m} \cdot \text{K}$$

$$\therefore T = 2000\text{K}$$

$$\lambda = \frac{9500 \mu\text{m} \cdot \text{K}}{2000\text{K}} = 4.8 \mu\text{m}$$

Para obter uma resposta com um erro menor teríamos que consultar uma tabela com intervalos menores ou podemos também interpolar entre  $\lambda T = 2000 \mu\text{m} \cdot \text{K}$  e  $\lambda T = 2200 \mu\text{m} \cdot \text{K}$  para o primeiro intervalo ou  $\lambda T = 9000 \mu\text{m} \cdot \text{K}$  e  $\lambda T = 9500 \mu\text{m} \cdot \text{K}$  para o segundo intervalo.

### 6.4

A Lei de deslocamento de Wien permite calcular o comprimento de onda para qual a potência espectral de emissão é máxima:

$$\lambda_{\text{max}} T = C_3$$

$$C_3 = 2898 \mu\text{m} \cdot \text{K}$$

Como sabemos a temperatura, é simples de calcular o comprimento de onda:

$$\begin{aligned} \lambda_{\text{max}, T=2000\text{K}} &= \frac{C_3}{T} = \frac{2898 \mu\text{m} \cdot \text{K}}{2000\text{K}} \\ &= 1.45 \mu\text{m} \end{aligned}$$

### 6.5

A potência de emissão pode ser obtida através da Lei de Planck ou consulta da tabela.

Começemos pela primeira opção. A Lei de Planck:

## Série 1 – Resoluções

---

$$I_{\lambda,b}(\lambda, T) = \frac{2hc^2}{\lambda^5 \left[ e^{hc/\lambda k_B T} - 1 \right]}$$

Como o emissor é difuso (corpo negro!), então podemos relacionar a potência de emissão com a intensidade de emissão:

$$\therefore E = \pi I$$

$$E = \pi I_{\lambda,b}(\lambda, T) = \pi \frac{2hc^2}{\lambda^5 \left[ e^{hc/\lambda k_B T} - 1 \right]}$$

É usual simplificar a expressão juntando as constantes:

$$E_{\lambda,b}(\lambda, T) = \frac{C_1}{\lambda^5 \left[ e^{C_2/\lambda T} - 1 \right]}$$

Onde:

$$\begin{aligned} C_1 &= 2\pi hc^2 \\ &= 3.74 \times 10^8 \text{ W} \cdot \mu\text{m}^4 / \text{m}^2 \\ C_2 &= hc / k_B \\ &= 1.44 \times 10^4 \mu\text{m} \cdot \text{K} \end{aligned}$$

Ou seja, para:

$$\begin{aligned} \lambda_{\max, T=2000\text{K}} &= 1.45 \mu\text{m} \\ T &= 2000\text{K} \end{aligned}$$

Temos:

$$\begin{aligned} E_{\lambda,b}(1.45 \mu\text{m}, 2000\text{K}) &= \frac{3.74 \times 10^8 \text{ W} \cdot \mu\text{m}^4 / \text{m}^2}{(1.45 \mu\text{m})^5 \left[ \exp \left[ 1.44 \times 10^4 \mu\text{m} \cdot \text{K} / (1.45 \mu\text{m} \times 2000\text{K}) \right] - 1 \right]} \\ &= 4.1 \times 10^5 \text{ W/m}^2 \cdot \mu\text{m} \end{aligned}$$

Embora o valor pareça “grande” temos que nos lembrar que é por unidade de área de  $\text{m}^2$ . A potência total de facto emitida para uma abertura seria significativamente mais baixa, ou seja a cavidade *real* não estaria a perder demasiado calor para o exterior.

A outra forma de encontrar a emissão espectral é com recurso à tabela. A quarta coluna da tabela indica o rácio da emissão espectral sobre o máximo da emissão espectral.

$$\frac{I_{\lambda,b}(\lambda, T)}{I_{\lambda,b}(\lambda_{\max}, T)}$$

Ou seja, quando este rácio é 1, temos a intensidade máxima. Esta forma também permite encontrar o comprimento de onda cuja intensidade de emissão é máxima.

## Série 1 – Resoluções

Consultando a tabela, o pico de emissão ocorre quando  $\lambda T = 2898 \mu\text{m} \cdot \text{K}$ .

A terceira coluna permite calcular a intensidade espectral: para um  $\lambda T$  o rácio  $\frac{I_{\lambda,b}(\lambda, T)}{\sigma T^5}$  é obtido que depois é multiplicado por  $\sigma T^5$  para obter a intensidade da emissão espectral.

**TABLE 12.2** Blackbody Radiation Functions

$\lambda T$ ( $\mu\text{m} \cdot \text{K}$ )	$F_{(0 \rightarrow \lambda)}$	$I_{\lambda,b}(\lambda, T)/\sigma T^5$ ( $\mu\text{m} \cdot \text{K} \cdot \text{sr}$ ) <sup>-1</sup>	$\frac{I_{\lambda,b}(\lambda, T)}{I_{\lambda,b}(\lambda_{\text{max}}, T)}$
200	0.000000	$0.375034 \times 10^{-27}$	0.000000
400	0.000000	$0.490335 \times 10^{-13}$	0.000000
600	0.000000	$0.104046 \times 10^{-8}$	0.000014
800	0.000016	$0.991126 \times 10^{-7}$	0.001372
1,000	0.000321	$0.118505 \times 10^{-5}$	0.016406
1,200	0.002134	$0.523927 \times 10^{-5}$	0.072534
1,400	0.007790	$0.134411 \times 10^{-4}$	0.186082
1,600	0.019718	0.249130	0.344904
1,800	0.039341	0.375568	0.519949
2,000	0.066728	0.493432	0.683123
2,200	0.100888	$0.589649 \times 10^{-4}$	0.816329
2,400	0.140256	0.658866	0.912155
2,600	0.183120	0.701292	0.970891
2,800	0.227897	0.720239	0.997123
2,898	0.250108	$0.722318 \times 10^{-4}$	1.000000

Neste caso (e em qualquer caso!!) a emissão máxima  $\frac{I_{\lambda,b}(\lambda, T)}{I_{\lambda,b}(\lambda_{\text{max}}, T)} = 1$  ocorre quando o produto  $\lambda T = 2898\text{K}$ .

O valor correspondente da 3ª coluna da tabela é:

$$\frac{I_{\lambda,b}(\lambda T = 2898\text{K})}{\sigma T^5} = 0.722 \times 10^{-4} (\mu\text{m} \cdot \text{K} \cdot \text{sr})^{-1}$$

Ou seja, a intensidade de emissão é:

$$I_{\lambda,b}(\lambda T = 2898\text{K}) = 0.722 \times 10^{-4} (\mu\text{m} \cdot \text{K} \cdot \text{sr})^{-1} \sigma T^5$$

Portanto, sabendo a temperatura, podemos calcular a intensidade de emissão:

## Série 1 – Resoluções

---

$$I_{\lambda,b}(\lambda T = 2898\text{K}) = 0.722 \times 10^{-4} (\mu\text{m} \cdot \text{K} \cdot \text{sr})^{-1} \times \sigma T^5 = I_{\lambda,b}(\lambda = 1.45\mu\text{m}, T = 2898\text{K})$$

$$T = 2000\text{K}$$

$$\lambda = 1.45\mu\text{m}$$

$$\sigma = 5.67 \times 10^{-8} \text{ W/m}^2 \times \text{K}^4$$

$$\begin{aligned} I_{\lambda,b}(\lambda = 1.45\mu\text{m}, T = 2000\text{K}) &= 0.722 \times 10^{-4} (\mu\text{m} \cdot \text{K} \cdot \text{sr})^{-1} \times (5.67 \times 10^{-8} \text{ W/m}^2 \text{ K}^4) \times (2000\text{K})^5 \\ &= 1.31 \times 10^5 \text{ W/m}^2 \cdot \text{sr} \end{aligned}$$

Novamente, como a emissão é difusa, a relação entre potência de emissão e intensidade de emissão é:

$$E = \pi I$$

E assim a potência de emissão é:

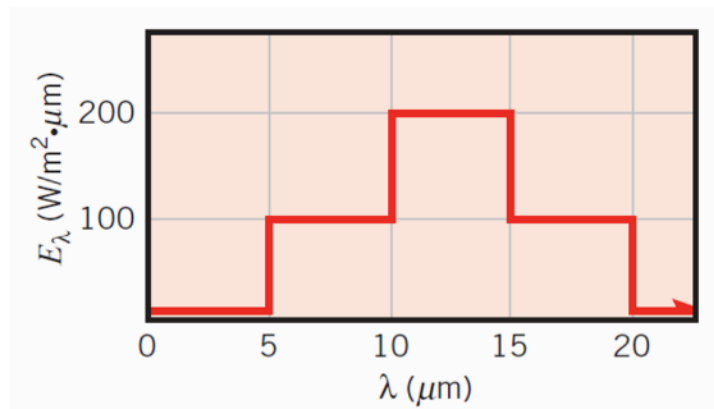
$$\begin{aligned} E &= \pi \times I_{\lambda,b}(\lambda = 1.45\mu\text{m}, T = 2898\text{K}) = \pi \text{sr} \times 1.31 \times 10^5 \text{ W/m}^2 \cdot \text{sr} \\ &= 4.1 \times 10^5 \text{ W/m}^2 \end{aligned}$$

## Série 1 – Resoluções

7

### 7.1

Temos a potência de emissão espectral.



Para obter a potência total de emissão, basta integrar a função da potência de emissão espectral

$$E = \int_0^{\infty} E_\lambda d\lambda$$

Neste caso terá de ser um integral numérico.

$$E = \int_0^{5\mu\text{m}} E_\lambda (0 \rightarrow 5\mu\text{m}) d\lambda + \int_{5\mu\text{m}}^{10\mu\text{m}} E_\lambda (5 \rightarrow 10\mu\text{m}) d\lambda + \int_{10\mu\text{m}}^{15\mu\text{m}} E_\lambda (10 \rightarrow 15\mu\text{m}) d\lambda + \int_{15\mu\text{m}}^{20\mu\text{m}} E_\lambda (15 \rightarrow 20\mu\text{m}) d\lambda$$

A função da potência de emissão espectral tem a seguinte forma:

$$E_\lambda (0 \rightarrow 5\mu\text{m}) = 0 \text{ W}/\text{m}^2 \cdot \mu\text{m}$$

$$E_\lambda (5 \rightarrow 10\mu\text{m}) = 100 \text{ W}/\text{m}^2 \cdot \mu\text{m}$$

$$E_\lambda (10 \rightarrow 15\mu\text{m}) = 200 \text{ W}/\text{m}^2 \cdot \mu\text{m}$$

$$E_\lambda (15 \rightarrow 20\mu\text{m}) = 100 \text{ W}/\text{m}^2 \cdot \mu\text{m}$$

O espaçamento da função para mudança de valor é constante:

$$d\lambda = 5\mu\text{m}$$

Ou seja, a integral é:

$$\begin{aligned} E &= \int_0^5 0 d\lambda + \int_5^{10} 100 d\lambda + \int_{10}^{15} 200 d\lambda + \int_{15}^{20} 100 d\lambda \\ &= 0 \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \mu\text{m}} \times (5-0) \mu\text{m} + 100 \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \mu\text{m}} \times (10-5) \mu\text{m} + 200 \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \mu\text{m}} \times (15-10) \mu\text{m} + 100 \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \mu\text{m}} \times (20-15) \mu\text{m} \\ E &= 2000 \text{ W}/\text{m}^2 \end{aligned}$$



## Série 1 – Resoluções

---

### 7.2

Para um emissor difuso, a intensidade de emissão é independente de direção:

$$I_e(\theta, \phi) = I_e$$

Assim sendo, a intensidade na normal  $\theta = 0^\circ$  ou a  $\theta = 30^\circ$  terá o mesmo valor.

Tendo calculado a potência total de emissão, e como a superfície é um emissor difuso, podemos utilizar a simples expressão que relaciona potência de emissão com intensidade de emissão:

$$E = I_e \pi$$

Ou seja, a intensidade de emissão total é dada por:

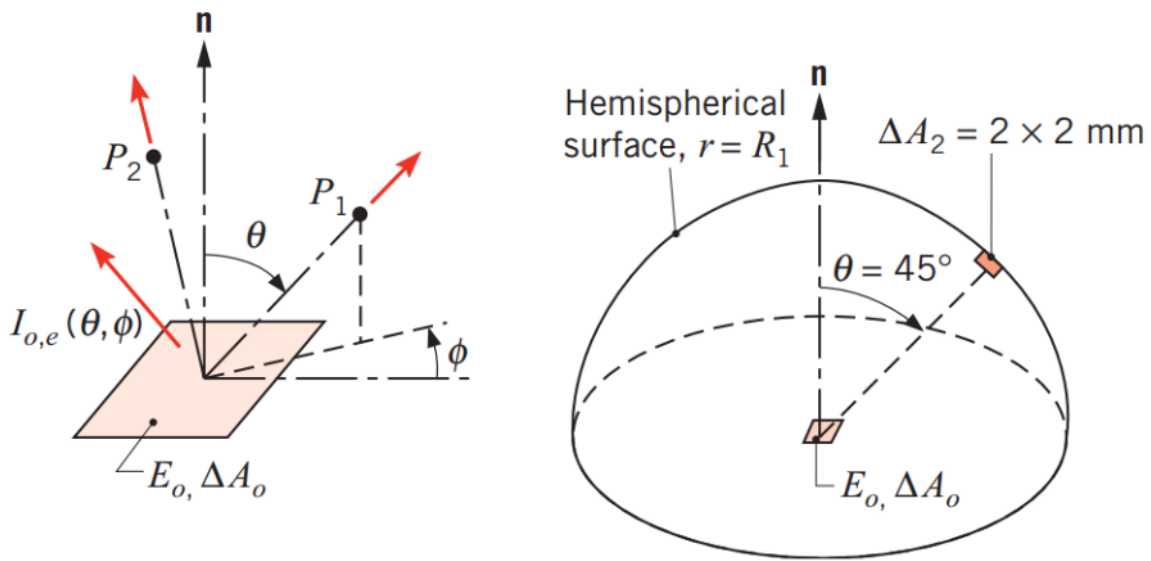
$$I_e = \frac{E}{\pi}$$

Neste caso já temos a potência total de emissão:

$$E = 2000 \text{ W/m}^2$$

Ou seja, a intensidade de emissão é (lembrando que  $\pi$  é o ângulo sólido com unidade de esterradiano):

$$\begin{aligned} I_e &= \frac{E}{\pi} = \frac{2000 \text{ W/m}^2}{\pi \cdot \text{sr}} \\ &= 637 \text{ W/m}^2 \cdot \text{sr} \end{aligned}$$



8.1

Temos de assumir que:

1. A superfície é um emissor difuso;
2. O meio sobre a superfície não interage com a radiação;
3. As superfícies emissoras e recetoras podem ser aproximadas de superfícies diferenciais, ou seja  $R_1^2 \gg \Delta A_o, \Delta A_2$

Para comprovar que as superfícies podem ser aproximadas de superfícies diferenciais:

$$R_1^2 = (0.5\text{m})^2 = 0.25\text{m}^2$$

$$\Delta A_o = (0.005\text{m})^2 = 2.5 \times 10^{-5} \text{m}^2$$

$$\Delta A_2 = (0.002\text{m})^2 = 4 \times 10^{-6} \text{m}^2$$

A densidade de potência de emissão é dada como:

$$E_o = 4000 \text{ W/m}^2$$

Para saber qual a potência que a superfície  $\Delta A_o = 2.5 \times 10^{-5} \text{m}^2$  está a emitir  $q_{0,\text{emit}}$ , temos que multiplicar a densidade de potência de emissão pela área da superfície:

$$\begin{aligned} q_{0,e} &= E_o \Delta A_o \\ &= 4000 \text{ W/m}^2 \times 2.5 \times 10^{-5} \text{m}^2 \\ q_{0,e} &= 0.1 \text{ W} \end{aligned}$$

## Série 1 – Resoluções

---

### 8.2

O emissor é difuso e, portanto, a intensidade de emissão é independente de direção:

$$I_{0,e}(r, \theta, \phi) = I_{0,e}(r)$$

Como o meio sobre a superfície de emissão não interage com ela, ou seja, não absorve radiação, a intensidade é independente de distância, ou seja:

$$I_{0,e}(r) = I_{0,e}$$

Sendo assim, podemos usar simples expressão que relacional potência de emissão cuja intensidade de emissão é independente de direção:

$$E = I_e \pi$$

$$E_0 = 4000 \text{ W/m}^2$$

$$\therefore I_e = \frac{E_0}{\pi} = \frac{4000 \text{ W/m}^2}{\pi \cdot \text{sr}}$$

$$I_{0,e} = 1273 \text{ W/m}^2 \cdot \text{sr}$$

### 8.3

Para calcular a potência emitida pela superfície  $q_{0,e}$  a partir da intensidade  $I(r, \theta, \phi)$ , será necessário integrar a intensidade por todo o hemisfério acima da superfície. Por conservação de energia, a radiação que incide sobre a superfície do hemisfério,  $q_{h,i}$ , terá que ter vindo da superfície emissora. Ou seja:

$$q_{0,e} = q_{h,i}$$

O ângulo sólido do hemisfério é de  $\omega_h = 2\pi \cdot \text{sr}$

Começemos com a expressão geral que descreve a radiação interceptada por uma superfície  $A$  vindo de uma superfície  $dA_1$ . É importante perceber que as taxas de emissão e recepção no ângulo sólido corresponde à superfície receptora serão iguais:

$$dq_1 = I_{\lambda,e}(\lambda, \theta, \phi) dA_1 \cos(\theta) d\omega$$

O integral a efetuar é para todo o angulo sólido correspondente ao hemisfério acima da superfície, portanto:

$$dq_1 = I_{1,\lambda,e}(\lambda, \theta, \phi) dA_1 \cos(\theta) d\omega$$

$$q_1 = \int_h I_{1,\lambda,e}(\lambda, \theta, \phi) dA_1 \cos(\theta) d\omega$$

## Série 1 – Resoluções

---

E como toda a taxa de emissão de 1 terá que interceptar o a superfície do hemisfério:

$$q_{1,e} = q_{h,i}$$

Então

$$q_{1,e} = q_{h,i} = \int_h I_{1,\lambda,e}(\lambda, \theta, \phi) dA_1 \cos(\theta) d\omega$$

Relembrando que em coordenadas esféricas o ângulo sólido é:

$$d\omega = \sin \theta \cdot d\theta \cdot d\phi$$

E portanto o integral é:

$$q_{1,e} = \int_0^{\phi=2\pi} \int_0^{\theta=\pi/2} I_{1,\lambda,e}(\lambda, \theta, \phi) dA_1 \cos(\theta) \sin \theta \cdot d\theta \cdot d\phi$$

Porque o emissor é difuso:

$$I_{1,\lambda,e}(\lambda, \theta, \phi) = I_{1,e}$$

Podemos então escrever que:

$$\begin{aligned} q_{1,e} &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} I_{1,e} dA_0 \cos(\theta) \sin \theta \cdot d\theta \cdot d\phi \\ &= I_{1,e} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} A_1 \cos(\theta) \sin \theta \cdot d\theta \cdot d\phi \\ &= I_{1,e} dA_1 \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \cos(\theta) \sin \theta \cdot d\theta \cdot d\phi \end{aligned}$$

Avaliando a integral para o variável  $\theta$  – resolução encontra-se nos slides das aulas:

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/2} \cos \theta \sin \theta \cdot d\theta \cdot d\phi &= \left[ \frac{1}{2} \sin^2 \theta \right]_0^{\pi/2} \\ &= \left[ \frac{1}{2} \sin^2 \frac{\pi}{2} \right] - \left[ \frac{1}{2} \sin^2 0 \right] = \frac{1}{2} - 0 \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Ou seja a expressão para a taxa de radiação é:

## Série 1 – Resoluções

---

$$\begin{aligned}q_{1,e} &= I_{1,e} dA_1 \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \cos(\theta) \sin \theta \cdot d\theta \cdot d\phi \\&= I_{1,e} dA_1 \int_0^{2\pi} \left[ \frac{1}{2} \sin^2 \theta \right]_0^{\pi/2} d\phi \\&= I_{1,e} dA_1 \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} d\phi \\&= \frac{I_{1,e} dA_1}{2} \int_0^{2\pi} d\phi\end{aligned}$$

O integral para o variável  $\phi$  é simples e avaliar:

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} d\phi &= [\phi]_0^{2\pi} = 2\pi - 0 \\&= 2\pi\end{aligned}$$

A expressão para taxa de radiação intercetada é então:

$$\begin{aligned}q_{1,e} &= \frac{I_{1,e} dA_1}{2} \int_0^{2\pi} d\phi = \frac{I_{1,e} dA_1}{2} 2\pi \\&= \pi I_{1,e} dA_1\end{aligned}$$

Esta será a expressão a utilizar para a nossa questão aqui.

Como a superfície emissora pode ser aproximada a uma superfície diferencial e se assumirmos que a emissão é igual de qualquer ponto da superfície, ou seja é uniforme:

$$dA_1 = \Delta A_0$$

Ou seja, a taxa de emissão  $q_{0,e}$  a partir da superfície  $\Delta A_0$  é:

$$q_{0,e} = \pi I_{0,e} \Delta A_0$$

Com a expressão encontrada, podemos calcular a taxa de emissão, já que a intensidade de emissão  $I_{0,e}$  da superfície é dada:

$$\begin{aligned}I_{0,e} &= 1273 \text{ W/m}^2 \cdot \text{sr} \\ \Delta A_0 &= \Delta A_0 = (0.005\text{m})^2 = 2.5 \times 10^{-5} \text{ m}^2 \\ q_{0,e} &= \pi \times 1273 \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \cdot \text{sr}} \times 2.5 \times 10^{-5} \text{ m}^2 \\ &= 0.1 \text{ W}\end{aligned}$$

## Série 1 – Resoluções

---

### 8.4

Por conservação de energia, a taxa de emissão  $q_{0,e}$  da superfície  $\Delta A_0$  terá que intercetar o hemisfério acima terá que ser igual a taxa de receção na superfície do hemisfério  $q_{h,i}$ . Isto é verdade quando a atmosfera que separa a superfície emissora e a recetora não interage (absorve) a radiação.

$$q_{0,e} = 0.1W$$

$$q_{h,i} = q_{0,e}$$

$$q_{h,i} = 0.1W$$

### 8.5

A potência média incidente sobre o hemisfério  $\overline{G}_h$  será a potência total incidente  $q_{h,i}$  sobre o hemisfério a dividir pela área do hemisfério  $A_h$ .

$$\overline{G}_h = \frac{q_{h,i}}{A_h}$$

A potência incidente já determinada:

$$q_{0,e} = q_{h,i} = 0.1W$$

A área de um hemisfério é a área da superfície de uma esfera a dividir por dois:

$$A = 4\pi r^2$$

$$A_h = \frac{A}{2}$$

$$= 2\pi r^2$$

Tendo o raio da esfera  $r = 0.5m$  a potência média é:

$$\begin{aligned}\overline{G}_h &= \frac{q_{h,i}}{2\pi r^2} = \frac{0.1W}{2\pi(0.5m)^2} \\ &= 0.064 \text{ W/m}^2 \\ &= 64m \text{ W/m}^2\end{aligned}$$

### 8.6

Intuitivamente o esperado seria que a radiação incidente na pequena superfície  $A_2$  seria um fração linear da radiação total incidente sobre o hemisfério, ou seja:

$$q_{2,i} = q_{h,i}A_2?$$

## Série 1 – Resoluções

---

Veremos que esta afirmação não é verdade, isto porque a área efetiva de emissão de  $A_0$  é inferior por estar inclinada com respeito à superfície recetora.

Portanto, começando da expressão geral que exprime a taxa de radiação:

$$dq_A = I_{\lambda,e}(\lambda, \theta, \phi) dA_1 \cos(\theta) d\omega$$

Como as superfícies podem ser tratadas como diferenciais, a expressão de taxa pode escrita da seguinte forma para o nosso caso:

$$q_{\Delta A_0 \rightarrow \Delta A_2} = I_{0,e} \Delta A_0 \cos(\theta_0) \omega_{2 \rightarrow 0}$$

O ângulo  $\theta_0$  que a superfície recetora está em relação à superfície emissora é

$$\theta_0 = 45^\circ$$

Para encontrar o ângulo sólido que a superfície recetora projeta com respeito à superfície emissora, comecemos pela definição geral do ângulo sólido:

$$d\omega = \frac{A_n}{r^2}$$

Em que  $A_n$  é área projetada (cujo normal está na direção da superfície emissora) e  $r$  a distância que separa as duas superfícies.

A área projetada é dada por:

$$A_n = A \cos \theta_i$$

Onde  $A$  é a área da superfície recetora.

Portanto, o ângulo sólido, quando  $r = R_1$  e  $\theta_i = \theta_2$

$$\omega_{2 \rightarrow 0} = \frac{\Delta A_2 \cos \theta_2}{R_1^2}$$

Tendo já todos os componentes que podemos calcular. É importante referir que o ângulo de incidência  $\theta_i$  sobre a superfície recetora neste caso é  $\theta_2 = 0^\circ$  dado que qualquer porção de superfície no hemisfério estará sempre normal à direção da radiação.

## Série 1 – Resoluções

---

$$q_{\Delta A_0 \rightarrow \Delta A_2} = I_{0,e} \Delta A_0 \cos(\theta_0) \frac{\Delta A_2 \cos \theta_2}{R_1^2}$$

$$I_{0,e} = 1273 \text{ W/m}^2 \text{sr}$$

$$\Delta A_0 = (0.005\text{m})^2 = 2.5 \times 10^{-5} \text{ m}^2$$

$$\Delta A_2 = (0.002\text{m})^2 = 4 \times 10^{-6} \text{ m}^2$$

$$\theta_0 = 45^\circ$$

$$\theta_2 = 0^\circ$$

$$R_1 = 0.5\text{m}$$

$$\begin{aligned} q_{\Delta A_0 \rightarrow \Delta A_2} &= 1273 \text{ W/m}^2 \text{sr} \times (2.5 \times 10^{-5} \text{ m}^2 \cos 45^\circ) \times \frac{4 \times 10^{-6} \text{ m}^2 \cos(0^\circ)}{(0.5\text{m})^2} \text{sr} \\ &= 3.6 \times 10^{-7} \text{ W} \end{aligned}$$

A irradiação,  $G$  é por definição a potência incidente sobre a área:

$$G = \frac{q}{A}$$

Para o caso em questão, temos que a potência incidente sobre a superfície  $G_2$  :

$$\begin{aligned} G_2 &= \frac{q_{\Delta A_0 \rightarrow \Delta A_2}}{\Delta A_2} \\ &= \frac{3.6 \times 10^{-7} \text{ W}}{4 \times 10^{-6} \text{ m}^2} = 90 \text{ mW/m}^2 \end{aligned}$$

Reparem que este valor é maior que a média que se calculou para o hemisfério  $\overline{G_h} = 64 \text{ m W/m}^2$  .

Podemos obter a irradiação diretamente, se na expressão inicial:

$$q_{\Delta A_0 \rightarrow \Delta A_2} = I_{0,e} \Delta A_0 \cos(\theta_0) \frac{\Delta A_2 \cos \theta_2}{R_1^2}$$

já estaríamos a dividir pela área da superfície:

$$\begin{aligned} G_2 &= \frac{q_{\Delta A_0 \rightarrow \Delta A_2}}{\Delta A_2} \\ &= I_{0,e} \Delta A_0 \cos(\theta_0) \frac{\cos \theta_2}{R_1^2} \end{aligned}$$

E reparem, que neste caso, conhecimento da área da superfície recetora não é necessária.



## Série 1 – Resoluções

---

### 8.7

Com a superfície recetora diretamente acima da superfície emissora, ou seja:

$$\theta_0 = 0^\circ$$

Podemos voltar a calcular com a expressão anteriormente encontrada, mas somente alterar o angulo de emissão

$\theta_0 = 0^\circ$ :

$$\begin{aligned} q_{\Delta A_0 \rightarrow \Delta A_2} &= 1273 \text{ W/m}^2\text{sr} \times (2.5 \times 10^{-5} \text{ m}^2 \cos 0^\circ) \times \frac{4 \times 10^{-6} \text{ m}^2 \cos(0^\circ)}{(0.5\text{m})^2} \text{sr} \\ &= 5.1 \times 10^{-7} \text{ W} \end{aligned}$$

E portanto a irradiação sobre a superfície recetora é:

$$\begin{aligned} G_2 &= \frac{q_{\Delta A_0 \rightarrow \Delta A_2}}{\Delta A_2} \\ &= \frac{5.1 \times 10^{-7} \text{ W}}{4 \times 10^{-6} \text{ m}^2} = 127 \text{ mW/m}^2 \end{aligned}$$

Reparem que o valor é superior que a média ou quando a superfície recetora está a  $45^\circ$ . Este será o valor máximo da irradiação sobre o hemisfério.

### 9.1

Temperatura da superfície do Sol é de 5800K. Utilizando a Lei de Deslocamento de Wien:

$$\lambda_{\max} T = C_3$$
$$C_3 = 2898\mu\text{m} \cdot \text{K}$$

Aplicando a expressão:

$$\lambda_{\max} T = C_3$$
$$C_3 = 2898\mu\text{m} \cdot \text{K}$$
$$\lambda_{\max} = \frac{C_3}{T}$$

$$\lambda_{\max, \text{Sol}} = \frac{C_3}{5800\text{K}} = 0.5\mu\text{m}$$

Para os restantes, é simplesmente uma questão de repetir:

$$\lambda_{\max} T = C_3$$
$$C_3 = 2898\mu\text{m} \cdot \text{K}$$
$$\lambda_{\max} = \frac{C_3}{T}$$

$$\lambda_{\max, 2500\text{K}} = \frac{C_3}{2500\text{K}} = 1.16\mu\text{m}$$

$$\lambda_{\max, 1500\text{K}} = \frac{C_3}{1500\text{K}} = 1.99\mu\text{m}$$

$$\lambda_{\max, 305\text{K}} = \frac{C_3}{305\text{K}} = 9.5\mu\text{m}$$

$$\lambda_{\max, 60\text{K}} = \frac{C_3}{60\text{K}} = 48.3\mu\text{m}$$

## Série 1 – Resoluções

10

### 10.1

A pergunta serve para demonstrar as ineficiências de uma lâmpada incandescente, que serve principalmente para iluminar, ou seja, tem de ter uma potência de emissão significativa na gama do espectro do visível.

A potência de emissão abaixo de visível engloba os seguintes comprimentos de onda:

$$0 < \lambda < 380\text{nm}$$

Podemos começar por assumir que a emissividade da lâmpada é de 1 e constante em todos os comprimentos de onda.

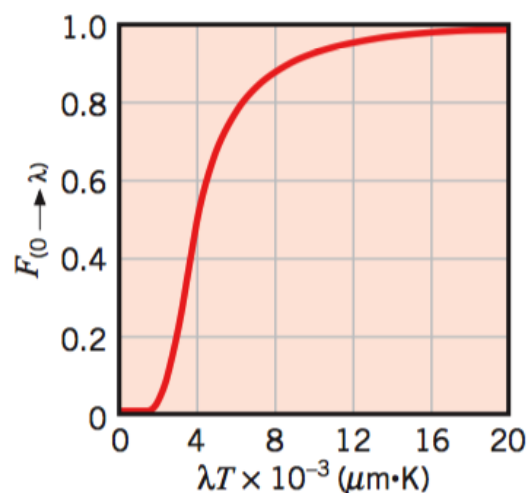
A Lei de Planck permite calcular a potência de emissão em função de comprimento de onda e temperatura.

$$E_{\lambda,b}(\lambda, T) = \frac{C_1}{\lambda^5 [e^{C_2/\lambda T} - 1]}$$
$$C_1 = 2\pi hc^2$$
$$= 3.74 \times 10^8 \text{ W} \cdot \mu\text{m}^4 / \text{m}^2$$
$$C_2 = hc / k_B$$
$$= 1.44 \times 10^4 \mu\text{m} \cdot \text{K}$$

Para obter a fração da potência de emissão numa gama do espectro é necessário integral.

$$F_{0 \rightarrow 0.380\mu\text{m}}(T = 2500\text{K}) = \frac{\int_0^{0.38\mu\text{m}} \frac{C_1}{\lambda^5 [e^{C_2/\lambda T} - 1]} d\lambda}{\int_0^{\infty} \frac{C_1}{\lambda^5 [e^{C_2/\lambda T} - 1]} d\lambda}$$

Ora, como discutido nas aulas, a integral é complexa, e, portanto, utilizamos tabelas com as soluções. A figura abaixo é o gráfico da integral da solução da integral da Lei de Planck.



## Série 1 – Resoluções

Fazendo a substituição de variáveis:

$$\lambda T = 0.38\mu\text{m} \times 2500\text{K} = 950\mu\text{m} \cdot \text{K} = 0.95\mu\text{m} \cdot \text{K}$$

Com recurso à tabela onde está o integral da função Max Plank:

**TABLE 12.2** Blackbody Radiation Functions

$\lambda T$ ( $\mu\text{m} \cdot \text{K}$ )	$F_{(0 \rightarrow \lambda)}$	$I_{\lambda,b}(\lambda, T)/\sigma T^5$ ( $\mu\text{m} \cdot \text{K} \cdot \text{sr}$ ) <sup>-1</sup>	$\frac{I_{\lambda,b}(\lambda, T)}{I_{\lambda,b}(\lambda_{\text{max}}, T)}$
200	0.000000	$0.375034 \times 10^{-27}$	0.000000
400	0.000000	$0.490335 \times 10^{-13}$	0.000000
600	0.000000	$0.104046 \times 10^{-8}$	0.000014
800	0.000016	$0.991126 \times 10^{-7}$	0.001372
1,000	0.000321	$0.118505 \times 10^{-5}$	0.016406

Na tabela que estamos a utilizar, os dados mais próximos que temos são para  $\lambda T = 1000\mu\text{m} \cdot \text{K}$  e vemos que entre 0 e  $\lambda T = 1000\mu\text{m} \cdot \text{K}$  a fração da radiação emitida é de  $F_{(0 \rightarrow 1000)} = 0.000321$

### 10.2

Na gama do visível, a fração de emissão será a fração de emissão até  $0.75\mu\text{m}$  com a subtração da emissão até  $0.38\mu\text{m}$ .

$$F_{0.38 \rightarrow 0.75\mu\text{m}}(T) = F_{0 \rightarrow 0.75\mu\text{m}}(T) - F_{0 \rightarrow 0.38\mu\text{m}}(T)$$

Para utilizar a tabela, é necessário encontrar também  $\lambda T$  para o comprimento de onda superior do visível. (O inferior já foi acima calculado).

$$\lambda = 0.75\mu\text{m}, T = 2500\text{K}$$

$$\lambda T = 1875\mu\text{m} \cdot \text{K}$$

Assim, a expressão:

$$F_{0.38 \rightarrow 0.75\mu\text{m}}(T) = F_{0 \rightarrow 0.75\mu\text{m}}(T) - F_{0 \rightarrow 0.38\mu\text{m}}(T)$$

É equivalent a:

$$F_{950\mu\text{m} \cdot \text{K} \rightarrow 1875\mu\text{m} \cdot \text{K}} = F_{0 \rightarrow 1875\mu\text{m} \cdot \text{K}} - F_{0 \rightarrow 950\mu\text{m} \cdot \text{K}}$$

Ou valor de  $\lambda T$  mais próximo na tabela é 2000 e portanto a fração aproximada que vamos calcular é:

$$F_{950\mu\text{m} \cdot \text{K} \rightarrow 1800\mu\text{m} \cdot \text{K}} = F_{0 \rightarrow 1800\mu\text{m} \cdot \text{K}} - F_{0 \rightarrow 1000\mu\text{m} \cdot \text{K}}$$

## Série 1 – Resoluções

**TABLE 12.2** Blackbody Radiation Functions

$\lambda T$ ( $\mu\text{m} \cdot \text{K}$ )	$F_{(0 \rightarrow \lambda)}$	$I_{\lambda,b}(\lambda, T)/\sigma T^5$ ( $\mu\text{m} \cdot \text{K} \cdot \text{sr}$ ) <sup>-1</sup>	$\frac{I_{\lambda,b}(\lambda, T)}{I_{\lambda,b}(\lambda_{\text{max}}, T)}$
200	0.000000	$0.375034 \times 10^{-27}$	0.000000
400	0.000000	$0.490335 \times 10^{-13}$	0.000000
600	0.000000	$0.104046 \times 10^{-8}$	0.000014
800	0.000016	$0.991126 \times 10^{-7}$	0.001372
1,000	0.000321	$0.118505 \times 10^{-5}$	0.016406
1,200	0.002134	$0.523927 \times 10^{-5}$	0.072534
1,400	0.007790	$0.134411 \times 10^{-4}$	0.186082
1,600	0.019718	0.249130	0.344904
1,800	0.039341	0.375568	0.519949
2,000	0.066728	0.493432	0.683123

Após consulta da tabela  $F_{(0 \rightarrow 1800)} = 0.039341$  e portanto a fração de radiação no visível é de:

$$F_{0 \rightarrow 1800 \mu\text{m}\cdot\text{K}} = 0.039341$$

$$F_{0 \rightarrow 1000 \mu\text{m}\cdot\text{K}} = 0.000321$$

$$\begin{aligned} F_{950 \mu\text{m}\cdot\text{K} \rightarrow 1800 \mu\text{m}\cdot\text{K}} &= F_{0 \rightarrow 1800 \mu\text{m}\cdot\text{K}} - F_{0 \rightarrow 1000 \mu\text{m}\cdot\text{K}} \\ &= 0.039341 - 0.000321 \\ &= 0.03902 \\ &\approx 4\% \end{aligned}$$

### 10.3

Dado que já calculamos a fração de radiação emitida entre 0 e  $0.75 \mu\text{m}$ , a radiação emitida:

$$T = 2500\text{K}$$

$$\lambda = 0.75 \mu\text{m}$$

$\therefore$

$$\lambda T = 1875 \mu\text{m} \cdot \text{K}$$

$$F(\lambda T = 1875 \mu\text{m} \cdot \text{K}) \approx F(\lambda T = 1800 \mu\text{m} \cdot \text{K}) = 0.039341$$

A fração da potência emitida  $F_{0.75 \mu\text{m} \rightarrow \infty}(T)$  será o resto.

## Série 1 – Resoluções

---

$$F_{0.75\mu\text{m}\rightarrow\infty}(T) = 1 - F_{0\rightarrow 0.75\mu\text{m}}(T)$$

$$T = 2500\text{K}$$

$$F_{0.75\mu\text{m}\rightarrow\infty}(T) = F_{1875\mu\text{m}\cdot\text{K}\rightarrow\infty} \approx F_{1800\mu\text{m}\cdot\text{K}\rightarrow\infty}$$

$$\begin{aligned} F_{1800\mu\text{m}\cdot\text{K}\rightarrow\infty} &= 1 - F_{1875\mu\text{m}\cdot\text{K}} \\ &= 1 - 0.039341 \\ &= 0.961 \\ &= 96\% \end{aligned}$$

## Série 1 – Resoluções

---

11

### 11.1

Começando com a lei de Planck:

$$E_{\lambda,b}(\lambda, T) = \frac{C_1}{\lambda^5 [e^{C_2/\lambda T} - 1]}$$

Para  $C_2/\lambda T \gg 1$ , a expressão simplifica para:

$$E_{\lambda,b}(\lambda, T) = \frac{C_1}{\lambda^5 [e^{C_2/\lambda T} - 1]} \cong \frac{C_1}{\lambda^5 e^{C_2/\lambda T}}$$

Esta solução foi encontrada por Wien antes de Planck. Utilizou argumentos termodinâmicos. Funciona bem para comprimentos de onda curtos, mas falha a comprimentos de onda longos.

Para calcular o erro, fazemos o cálculo  $\lambda T = 2898 \mu\text{m} \cdot \text{K}$  ambas as expressões para comparar.

$$\text{Erro} = \frac{E_{\lambda,b}(\lambda, T)|_{\text{Wien}}}{E_{\lambda,b}(\lambda, T)|_{\text{Planck}}} = \frac{\frac{C_1}{\lambda^5 e^{C_2/\lambda T}}}{\frac{C_1}{\lambda^5 [e^{C_2/\lambda T} - 1]}} = \frac{e^{C_2/\lambda T} - 1}{e^{C_2/\lambda T}} = 1 - \frac{1}{e^{C_2/\lambda T}}$$

Como:

$$C_2 = hc / k_B = 1.44 \times 10^4 \mu\text{m} \cdot \text{K}$$

Temos então que erro é:

$$\begin{aligned} \text{Erro} &= \frac{E_{\lambda,b}(2898 \mu\text{m} \cdot \text{K})|_{\text{Wien}}}{E_{\lambda,b}(2898 \mu\text{m} \cdot \text{K})|_{\text{Planck}}} = 1 - \frac{1}{e^{1.44 \times 10^4 \mu\text{m} \cdot \text{K} / 2898 \mu\text{m} \cdot \text{K}}} \\ &= 0.993 \end{aligned}$$

Ou seja, é mínimo.

### 11.2

Novamente, começamos coma Lei de Planck:

$$E_{\lambda,b}(\lambda, T) = \frac{C_1}{\lambda^5 [e^{C_2/\lambda T} - 1]}$$

E agora estamos no regime em que  $C_2/\lambda T \gg 1$ .

Neste caso aqui vamos utilizar a seguinte expansão:

## Série 1 – Resoluções

---

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

Para fazer a seguinte aproximação:

$$e^{C_2/\lambda T} \approx 1 + C_2 / \lambda T$$

Ou seja a Lei de Planck com esta aproximação é a aproximação Rayleigh-Jeans:

$$E_{\lambda,b}(\lambda, T) = \frac{C_1}{\lambda^5 [e^{C_2/\lambda T} - 1]} \approx \frac{C_1}{\lambda^5 [1 + C_2 / \lambda T - 1]} = \frac{C_1}{\lambda^5 C_2 / \lambda T} = \frac{C_1}{C_2} \frac{T}{\lambda^4}$$

Podemos agora assim avaliar o erro associado:

$$\text{Erro} = \frac{E_{\lambda,b}(\lambda, T)|_{\text{Rayleigh-Jeans}}}{E_{\lambda,b}(\lambda, T)|_{\text{Planck}}} = \frac{\frac{C_1}{C_2} \frac{T}{\lambda^4}}{\frac{C_1}{\lambda^5 [e^{C_2/\lambda T} - 1]}} = \frac{\lambda T}{C_2} [e^{C_2/\lambda T} - 1]$$

Ou seja a  $\lambda T = 10^5 \mu\text{m} \cdot \text{K}$

$$\begin{aligned} \text{Erro} &= \frac{E_{\lambda,b}(10^5 \mu\text{m} \cdot \text{K})|_{\text{Rayleigh-Jeans}}}{E_{\lambda,b}(10^5 \mu\text{m} \cdot \text{K})|_{\text{Planck}}} = \frac{10^5 \mu\text{m} \cdot \text{K}}{1.44 \times 10^4 \mu\text{m} \cdot \text{K}} \exp\left(\frac{1.44 \times 10^4 \mu\text{m} \cdot \text{K}}{10^5 \mu\text{m} \cdot \text{K}} - 1\right) \\ &= 1.075 \end{aligned}$$

Ou seja, o erro é menor do que 10% para temperaturas altas e/ou comprimentos de onda longos.



## Série 1 – Resoluções

---

12

A primeira suposição que temos que fazer é que a emissividade espectral apresentada na figura é independente de temperatura.

Por definição, a emissividade total hemisférica pode ser descrito pela seguinte expressão:

$$\varepsilon(T) \equiv \frac{E(T)}{E_b(T)} = \frac{\int_0^{\infty} \varepsilon(\lambda) E(\lambda, T) d\lambda}{E_b(T)} = \int_0^{\infty} \frac{\varepsilon(\lambda) E(\lambda, T)}{E_b(T)} d\lambda$$

Devem reconhecer que com o aumento da temperatura, o espectro de emissão de um corpo irá concentra-se em comprimentos de onda mais curtos. Ou seja, é obvio que o rácio que define a emissividade total espectral hemisférica  $\varepsilon(T)$  irá ser diferente se a emissividade espectral não for constante, que é o caso aqui.

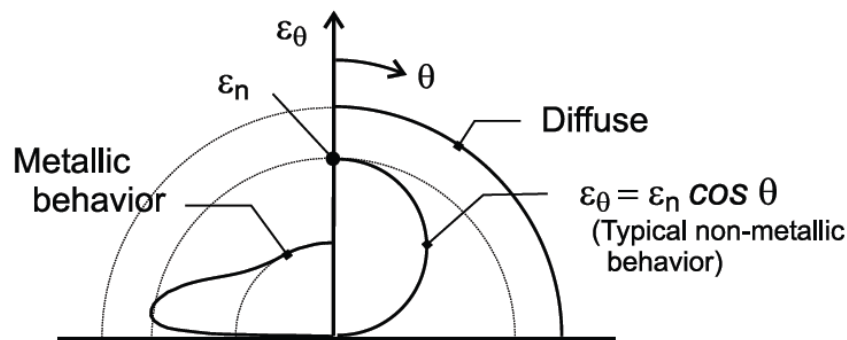
Para o material A, a emissividade espectral aumenta para comprimentos de onda curtos. Como tal irá emitir mais relativamente, ou seja emissividade total hemisférica irá aumentar.

Para o material B, a emissividade espectral diminui para comprimentos de onda curtos. Como tal irá emitir menos relativamente, ou seja a emissividade total hemisférica irá diminuir.

## Série 1 – Resoluções

13

A figura ilustra o comportamento típico de diferentes superfícies, incluindo a de metais.



Nas aulas vimos que emissividade espectral pode ser descrito pela seguinte expressão:

$$\epsilon_\lambda(\lambda, T) = 2 \int_0^{\pi/2} \epsilon_{\lambda, \theta}(\lambda, \theta, T) \cos \theta \sin \theta \cdot d\theta$$

E considerando que não estamos interessados na dependência em temperatura nem espectral:

$$\epsilon = 2 \int_0^{\pi/2} \epsilon_\theta(\theta) \cos \theta \sin \theta \cdot d\theta$$

Podemos então substituir pela nossa expressão de emissividade espectral direcional para obter a seguinte expressão:

$$\epsilon(\theta) = \epsilon_n \cos \theta$$

$$\epsilon = 2 \int_0^{\pi/2} \epsilon_\theta(\theta) \cos \theta \sin \theta \cdot d\theta$$

$\therefore$

$$\epsilon = 2 \int_0^{\pi/2} \epsilon_n \cos \theta \cos \theta \sin \theta \cdot d\theta = 2\epsilon_n \int_0^{\pi/2} \cos^2 \theta \sin \theta \cdot d\theta$$

Podemos portanto avaliar o integral:

$$\int \cos^2 \theta \sin \theta d\theta = -\frac{1}{3} \cos^3 \theta + c$$

$$\therefore 2\epsilon_n \int_0^{\pi/2} \cos^2 \theta \sin \theta d\theta = 2\epsilon_n \left[ -\frac{1}{3} \cos^3 \theta \right]_0^{\pi/2} = 2\epsilon_n \left[ 0 - \left( -\frac{1}{3} \right) \right]$$

$$= \frac{2}{3} \epsilon_n$$

## 14.1

O termómetro radiativo aqui funciona de forma a converter a radiação incidente sobre ela para uma temperatura. Quanto maior for irradiação, maior será a temperatura de leitura do termómetro. Como o termómetro é calibrado contra um corpo negro, cuja emissividade por definição é 1, um outro corpo à mesma temperatura mas de emissividade inferior irá emitir menos radiação e portanto menor será a radiação incidente sobre o nosso termómetro. Isto é evidente pela lei de Stefan-Boltzmann, cuja radiação emitida é diretamente proporcional à emissividade.

Formalizando:

Começemos com a expressão que indica a transferência de calor radiativa entre duas superfícies planas

$$dq_A = I_{\lambda,e}(\lambda, \theta, \phi, T) dA_1 \cos(\theta) d\omega$$

Utilizando a notação da pergunta e assumindo que o termómetro encontra-se exposto a uma distância mas paralelo à superfície emissora e que as superfícies podem ser consideradas como superfícies diferenciais:

∴

$$dq_A \rightarrow q$$

$$I_{\lambda,e}(\lambda, \theta, \phi, T) \rightarrow I_{\lambda,e}(\lambda, T_S)$$

$$dA_1 \rightarrow A_T$$

$$\theta = 0^\circ, \cos 0^\circ = 1$$

$$d\omega \rightarrow \omega_T$$

∴

$$q = \varepsilon_\lambda I_{\lambda,e}(\lambda, T_S) A_T \omega_T$$

Esta é a irradiação que irá incidir sobre o nosso termómetro. Aqui está incluída a emissividade da nossa superfície que queremos medir.

O que o termómetro *pensa* que está a ver é um corpo negro em que a emissividade (espectral também) é 1, e portanto com a mesma notação:

$$q = I_{\lambda,b}(\lambda, T_\lambda) A_T \omega_T$$

É importante realçar que aqui estamos a igual as potências, em que  $q$  é a potência que incide no nosso termómetro.

Podemos agora igualar as expressões:

$$\varepsilon_\lambda I_{\lambda,e}(\lambda, T_S) A_T \omega_T = I_{\lambda,b}(\lambda, T_\lambda) A_T \omega_T$$

$$\varepsilon_\lambda I_{\lambda,e}(\lambda, T_S) = I_{\lambda,b}(\lambda, T_\lambda)$$

## Série 1 – Resoluções

---

Como a emissividade é menor que 1:

$$\varepsilon_\lambda < 1$$

Segue que:

$$I_{\lambda,e}(\lambda, T_S) > I_{\lambda,b}(\lambda, T_\lambda)$$

Ou seja:

$$T_S > T_\lambda$$

Ou seja, a temperatura que o termómetro pensa que está a ver  $T_\lambda$  é inferior à temperatura real da superfície  $T_S$

### 14.2

Queremos demonstrar a seguinte expressão:

$$\frac{1}{T_S} = \frac{1}{T_\lambda} + \frac{\lambda}{C_2} \ln \varepsilon_\lambda$$

Começemos por rever a expressão de Deslocamento de Wien:

$$E_{\lambda,b}(\lambda, T_b) = \frac{C_1}{\lambda^5 \exp C_2 / \lambda T_\lambda}$$

É óbvio que para um corpo não negro, a potência de emissão será o produto da potência de emissão de um corpo negro e a emissividade:

$$E_{\lambda,e}(\lambda, T) = \varepsilon_\lambda \frac{C_1}{\lambda^5 \exp C_2 / \lambda T_S}$$

No nosso caso a potência a ser emitida é a mesma porque a potência recebida pelo termómetro é a mesma e assim podemos igualar as expressões: No entanto, as superfícies têm emissividades diferentes e portanto terão também temperaturas diferentes.

$$\begin{aligned} E_{\lambda,b}(\lambda, T_\lambda) &= E_{\lambda,e}(\lambda, T) \\ \frac{C_1}{\lambda^5 \exp C_2 / \lambda T_\lambda} &= \varepsilon_\lambda \frac{C_1}{\lambda^5 \exp C_2 / \lambda T_S} \end{aligned}$$

Arrumando a casa:

## Série 1 – Resoluções

---

$$\frac{1}{\exp C_2/\lambda T_\lambda} = \varepsilon_\lambda \frac{1}{\exp C_2/\lambda T_S}$$

E agora já temos todos os termos na expressão acima pedida, faltando só fazer o logaritmo natural e reorganizar:

$$-\frac{C_2}{\lambda T_\lambda} = \ln \varepsilon_\lambda - \frac{C_2}{\lambda T_S}$$

$$\frac{1}{T_S} = \frac{1}{T_\lambda} + \frac{\lambda}{C_2} \ln \varepsilon_\lambda$$

### 14.3

A expressão a utilizar é:

$$\frac{1}{T_S} = \frac{1}{T_\lambda} + \frac{\lambda}{C_2} \ln \varepsilon_\lambda$$

E as condições são:

$$\begin{aligned} T_S &= 1000\text{K} \\ \lambda &= 0.65\mu\text{m} \\ \varepsilon_\lambda(0.65\mu\text{m}) &= 0.9 \end{aligned}$$

A temperatura que o termómetro  $T_\lambda$  irá ler é:

$$\begin{aligned} \frac{1}{T_S} &= \frac{1}{T_\lambda} + \frac{\lambda}{C_2} \ln \varepsilon_\lambda \\ \therefore \\ T_\lambda &= \left( \frac{1}{T_S} - \frac{\lambda}{C_2} \ln \varepsilon_\lambda \right)^{-1} \end{aligned}$$

E portanto:

$$\begin{aligned} C_2 &= 1.4 \times 10^4 \mu\text{m} \cdot \text{K} \\ T_\lambda &= \left( \frac{1}{1000\text{K}} - \frac{0.65\mu\text{m}}{1.4 \times 10^4 \mu\text{m} \cdot \text{K}} \ln 0.9 \right)^{-1} \\ &= 995\text{K} \end{aligned}$$

Como esperado, a temperatura lida pelo termómetro é inferior. No entanto, a diferença é só cerca de 5K em 1000K, ou seja um erro de 0.5%.

## 15.1

A definição de emissividade a usar aqui é a emissividade total global:

$$\varepsilon(T) = \frac{\int_0^{\infty} \varepsilon_{\lambda}(\lambda) E_{\lambda,b}(\lambda, T_s) d\lambda}{E_b(T)}$$

Na nossa pergunta temos 3 gamas de emissividades:

$$\varepsilon_0(0 \rightarrow 1\mu\text{m}) = 0$$

$$\varepsilon_1(1 \rightarrow 3\mu\text{m}) = 0.7$$

$$\varepsilon_2(3\mu\text{m} \rightarrow \infty) = 0.5$$

Como temos 3 gamas de comprimentos de onda com diferentes emissividades, o integral a fazer é:

$$\begin{aligned} \varepsilon(T) &= \frac{\int_0^{\infty} \varepsilon_{\lambda}(\lambda) E_{\lambda,b}(\lambda, T) d\lambda}{E_b(T)} \\ &= \frac{\varepsilon_0 \int_0^{1\mu\text{m}} E_{\lambda,b}(\lambda, T) d\lambda}{E_b(T)} + \frac{\varepsilon_1 \int_{1\mu\text{m}}^{3\mu\text{m}} E_{\lambda,b}(\lambda, T) d\lambda}{E_b(T)} + \frac{\varepsilon_2 \int_{3\mu\text{m}}^{\infty} E_{\lambda,b}(\lambda, T) d\lambda}{E_b(T)} \end{aligned}$$

Como o integral é complexo, utilizamos a tabela e assim para dois intervalos de comprimento de onda:

$$F(\lambda_1 \rightarrow \lambda_2) = F(0 \rightarrow \lambda_2) - F(0 \rightarrow \lambda_1) = \frac{\int_0^{\lambda_2} \varepsilon_{\lambda} E_{\lambda,b}(\lambda, T) d\lambda - \int_0^{\lambda_1} \varepsilon_{\lambda} E_{\lambda,b}(\lambda, T) d\lambda}{E_b(T)}$$

No nosso caso:

$$\varepsilon = \varepsilon_0 F(0 \rightarrow 1\mu\text{m}, T) + \varepsilon_1 F(1\mu\text{m} \rightarrow 3\mu\text{m}, T) + \varepsilon_2 F(3\mu\text{m} \rightarrow \infty, T)$$

Para simplificar, podemos desde logo verificar que:

$$F(0 \rightarrow 1\mu\text{m}, T) \cong 0$$

E assim:

$$\varepsilon = \varepsilon_1 F(1\mu\text{m} \rightarrow 3\mu\text{m}, T) + \varepsilon_2 F(3\mu\text{m} \rightarrow \infty, T)$$

Olhando para os termos individuais.

## Série 1 – Resoluções

---

O primeiro termo:

$$F(1\mu\text{m} \rightarrow 3\mu\text{m}, T) = F(0 \rightarrow 3\mu\text{m}, T) - F(0 \rightarrow 1\mu\text{m}, T)$$

E o segundo termo é:

$$F(3\mu\text{m} \rightarrow \infty, T) = F(0 \rightarrow \infty, T) - F(0 \rightarrow 3\mu\text{m}, T)$$

A fração do espectro entre  $\lambda=3\mu\text{m}$  e  $\lambda=\infty$  pode ser escrita da seguinte forma:

$$F(3\mu\text{m} \rightarrow \infty, T) = 1 - F(0 \rightarrow 3\mu\text{m}, T)$$

E portanto, com os termos todas as expressões necessárias para calcular:

$$\varepsilon = \varepsilon_1 [F(0 \rightarrow 3\mu\text{m}, T) - F(0 \rightarrow 1\mu\text{m}, T)] + \varepsilon_2 [1 - F(0 \rightarrow 3\mu\text{m}, T)]$$

Para utilizar a tabela é necessário avaliar  $\lambda T$

$$T = 400\text{K}$$

$$\lambda_1 = 1\mu\text{m}$$

$$\lambda_1 T = 400\mu\text{m} \cdot \text{K}$$

$$\lambda_2 = 3\mu\text{m}$$

$$\lambda_2 T = 1200\mu\text{m} \cdot \text{K}$$

E, portanto, as frações a avaliar são:

$$F(0 \rightarrow 1\mu\text{m}, T) = F(400\mu\text{m} \cdot \text{K})$$

$$F(0 \rightarrow 3\mu\text{m}, T) = F(1200\mu\text{m} \cdot \text{K})$$

E, portanto, a expressão a avaliar será:

$$\varepsilon = \varepsilon_1 [F_{0 \rightarrow 3\mu\text{m}}(1200\mu\text{m} \cdot \text{K}) - F_{0 \rightarrow 1\mu\text{m}}(400\mu\text{m} \cdot \text{K})] + \varepsilon_2 [1 - F_{0 \rightarrow 3\mu\text{m}}(1200\mu\text{m} \cdot \text{K})]$$

Recorrendo à tabela:

$$F(1200\mu\text{m} \cdot \text{K}) = 0.002$$

$$F(400\mu\text{m} \cdot \text{K}) = 0$$

E, portanto, a emissividade total é:

## Série 1 – Resoluções

---

$$\begin{aligned}\varepsilon &= 0.7 \times (0.002 - 0) + 0.5 \times (1 - 0.002) \\ &= 0.500\end{aligned}$$

### 15.2

A absorptividade total é definida como (analogamente à emissividade total):

$$\alpha = \frac{\int_0^{\infty} \alpha_{\lambda}(\lambda) G(\lambda) d\lambda}{G}$$

Como a nossa superfície está dentro do forno, ou seja, dentro de uma cavidade e portanto rodeada da superfície do forno, podemos dizer que a densidade de radiação incidente  $G$  sobre a nossa superfície é igual à densidade de radiação emitida pela superfície do forno  $E_F$ :

$$G = E_F(T_F)$$

E espectralmente também:

$$G(\lambda) = E_F(\lambda, T_F)$$

E como estamos dentro de uma cavidade, o espectro de emissão das superfícies da cavidade será a de um corpo negro e portanto a radiação incidente sobre a nossa superfície será a de um corpo negro:

$$\begin{aligned}E_F(\lambda, T_F) &= E_b(\lambda, T_F) \\ \int_0^{\infty} E_b(\lambda, T_F) d\lambda &= E_b(T_F)\end{aligned}$$

E como demonstrado nas aulas, a emissividade espectral é igual à absorptância espectral:

$$\varepsilon_{\lambda}(\lambda) = \alpha_{\lambda}(\lambda)$$

A nossa definição de absorptância fica em:

$$\alpha = \frac{\int_0^{\infty} \alpha_{\lambda}(\lambda) G(\lambda) d\lambda}{G} = \frac{\int_0^{\infty} \varepsilon_{\lambda}(\lambda) E_{\lambda,b}(\lambda, T_F) d\lambda}{E_{\lambda,b}(T_F)}$$

Tal como fizemos anteriormente para a emissividade, podemos agora escrever uma expressão para a absorptância total para as 3 gamas de comprimentos de onda:



## Série 1 – Resoluções

---

$$\alpha = \frac{\int_0^{\infty} \alpha_{\lambda}(\lambda) E_{\lambda,b}(\lambda, T_F) d\lambda}{E_b(T_F)}$$

$$= \frac{\alpha_0 \int_0^{1\mu\text{m}} E_{\lambda,b}(\lambda, T_F) d\lambda + \alpha_1 \int_{1\mu\text{m}}^{3\mu\text{m}} E_{\lambda,b}(\lambda, T_F) d\lambda + \alpha_2 \int_{3\mu\text{m}}^{\infty} E_{\lambda,b}(\lambda, T_F) d\lambda}{E_b(T_F)}$$

$$= \frac{\alpha_0 \int_0^{1\mu\text{m}} E_{\lambda,b}(\lambda, T_F) d\lambda}{E_b(T_F)} + \frac{\alpha_1 \int_{1\mu\text{m}}^{3\mu\text{m}} E_{\lambda,b}(\lambda, T_F) d\lambda}{E_b(T_F)} + \frac{\alpha_2 \int_{3\mu\text{m}}^{\infty} E_{\lambda,b}(\lambda, T_F) d\lambda}{E_b(T_F)}$$

Identificando as frações relevantes:

$$\alpha = \alpha_0 F(0 \rightarrow 1\mu\text{m}, T) + \alpha_1 F(1\mu\text{m} \rightarrow 3\mu\text{m}, T) + \alpha_2 F(3\mu\text{m} \rightarrow \infty, T)$$

E como fizemos para a emissividade, podemos simplificar e proceder ao cálculo:

$$\alpha = \alpha_1 [F(0 \rightarrow 3\mu\text{m}) - F(0 \rightarrow 1\mu\text{m})] + \alpha_2 [1 - F(0 \rightarrow 3\mu\text{m})]$$

Avaliamos  $\lambda T$  :

$$T_F = 2000\text{K}$$

$$\lambda_1 = 1\mu\text{m}$$

$$\lambda_1 T_F = 2000\mu\text{m} \cdot \text{K}$$

$$\lambda_2 = 3\mu\text{m}$$

$$\lambda_2 T_F = 6000\mu\text{m} \cdot \text{K}$$

E, portanto, as nossas frações são:

$$F(0 \rightarrow 1\mu\text{m}, T_F) = F(2000\mu\text{m} \cdot \text{K}) = 0.067$$

$$F(0 \rightarrow 3\mu\text{m}, T_F) = F(6000\mu\text{m} \cdot \text{K}) = 0.738$$

Podemos finalmente calcular a absorptância:

$$\begin{aligned} \alpha &= \alpha_1 [F(0 \rightarrow 3\mu\text{m}) - F(0 \rightarrow 1\mu\text{m})] + \alpha_2 [1 - F(0 \rightarrow 3\mu\text{m})] \\ &= 0.7 \times (0.738 - 0.067) + 0.5 \times (1 - 0.738) \\ &= 0.601 \end{aligned}$$

## Série 1 – Resoluções

---

### 15.3

O fluxo de radiação refletida  $G_{\text{ref}}$  será o produto da radiação incidente  $G$  com o coeficiente de refletividade  $\rho$ :

$$G_{\text{ref}} = \rho G$$

E como já demonstramos nas aulas, para superfícies opacas, a soma dos coeficientes de absorção e reflexão é unitária:

$$1 = \alpha + \rho$$

$$\rho = 1 - \alpha$$

Temos:

$$G_{\text{ref}} = (1 - \alpha) G$$

Lembrando também que a radiação incidente sobre a nossa superfície é a de um corpo negro porque estamos no interior de uma cavidade:

$$G = E_{\text{F}}(\lambda, T_{\text{F}}) = E_{\text{b}}(\lambda, T_{\text{F}})$$

O fluxo de radiação refletida pode ser descrito pela seguinte expressão:

$$G_{\text{ref}} = (1 - \alpha) E_{\text{b}}(T_{\text{F}})$$

E, portanto, podemos agora calcular:

$$T_{\text{F}} = 2000\text{K}$$

$$\alpha = 0.601$$

$$\begin{aligned} G_{\text{ref}} &= (1 - 0.601) \times 5.67 \times 10^{-8} \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \text{K}^4} (2000\text{K})^4 \\ &= 3.62 \times 10^5 \frac{\text{W}}{\text{m}^2} \end{aligned}$$

### 15.4

O balanço de fluxo de radiação será a diferença entre a radiação incidente e a radiação refletida e emitida pela superfície.

## Série 1 – Resoluções

---

$$q_{\text{rad,net}} = G - G_{\text{ref}} - E(T_s) = G_{\text{abs}} - E(T_s)$$

$$G = \sigma T_F^4$$

$$G_{\text{ref}} = \rho G = (1 - \alpha)G = (1 - \alpha)\sigma T_F^4$$

$$E(T_s) = \varepsilon E_b(T_s) = \varepsilon \sigma T_s^4$$

$$\begin{aligned} q_{\text{rad,net}} &= \sigma T_F^4 - (1 - \alpha)\sigma T_F^4 - \varepsilon \sigma T_s^4 \\ &= \alpha \sigma T_F^4 - \varepsilon \sigma T_s^4 \\ &= \sigma (\alpha T_F^4 - \varepsilon T_s^4) \end{aligned}$$

$$\alpha = 0.601$$

$$\varepsilon = 0.500$$

$$\begin{aligned} q_{\text{rad,net}} &= 5.67 \times 10^{-8} \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \text{K}^4} \left( 0.601 \times (2000\text{K})^4 - 0.500 \times (400\text{K})^4 \right) \\ &= 5.43 \times 10^5 \frac{\text{W}}{\text{m}^2} \end{aligned}$$

### 15.5

Para calcular a potência emitida a  $2\mu\text{m}$  temos que recorrer à tabela, mas agora à coluna que indica a intensidade espectral.

$$\frac{I_{\lambda,b}(\lambda, T)}{\sigma T^5}$$

E no nosso caso, o valor das variáveis são:

$$\lambda = 2\mu\text{m}$$

$$T_s = 400\text{K}$$

$$\lambda T_s = 800\mu\text{m} \cdot \text{K}$$

Fazendo da tabela com o seguinte valor de  $\lambda T = 800\mu\text{m} \cdot \text{K}$

$$\frac{I_{\lambda,b}(\lambda, T)}{\sigma T^5} = \frac{I_{\lambda,b}(800\mu\text{m} \cdot \text{K})}{5.67 \times 10^{-7} \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \text{K}^4} (400\text{K})^5} = 0.991 \times 10^{-7} \frac{1}{\mu\text{m} \cdot \text{K} \cdot \text{sr}}$$

## Série 1 – Resoluções

---

Podemos então ordenar para obter a intensidade:

$$\begin{aligned} I_{\lambda,b}(2\mu\text{m}, 400\text{K}) &= 0.991 \times 10^{-7} \frac{1}{\mu\text{m} \cdot \text{K} \cdot \text{sr}} \times 5.67 \times 10^{-7} \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \text{K}^4} (400\text{K})^5 \\ &= 0.0575 \frac{\text{W}}{\mu\text{m} \times \text{K} \times \text{sr}} \end{aligned}$$

Como a superfície é difusa, podemos utilizar a relação simples entre intensidade e potência de emissão:

$$\begin{aligned} E &= \pi I \\ E(\lambda) &= \pi I(\lambda) \end{aligned}$$

E

$$\begin{aligned} E(\lambda) &= \varepsilon E_b(\lambda) \\ I(\lambda) &= \varepsilon I_b(\lambda) \end{aligned}$$

E portanto:

$$E(\lambda) = \varepsilon \pi I_b(\lambda)$$

Estamos agora na posição de calcular:

$$\begin{aligned} \lambda &= 2\mu\text{m} \\ \varepsilon &= 0.7 \\ I_b(\lambda) &= 0.0575 \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \cdot \mu\text{m} \cdot \text{sr}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E(2\mu\text{m}) &= 0.7 \times \pi \text{sr} \times 0.0575 \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \cdot \mu\text{m} \cdot \text{sr}} \\ &= 0.126 \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \mu\text{m}} \end{aligned}$$

### 15.6

Para encontrar o comprimento de onda que representa o ponto  $\epsilon$  que a potência de emissão é igual acima e abaixo temos de recorrer à tabela e identificar o  $\lambda T$  em que a fração  $F = 0.5$ :

$$F(0 \rightarrow \lambda T) \approx 0.5$$

$$\lambda T = 4100\mu\text{m} \cdot \text{K}$$

$$T = 400\text{K}$$

$\therefore$

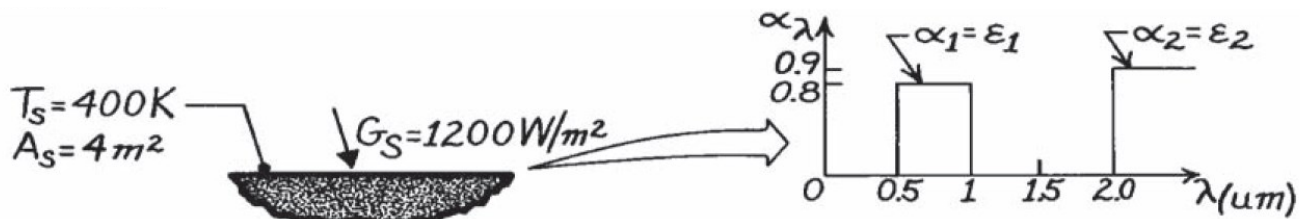
$$\begin{aligned}\lambda &= \frac{4100\mu\text{m} \cdot \text{K}}{400\text{K}} \\ &= 10.3\mu\text{m}\end{aligned}$$

## Série 1 – Resoluções

16

Começemos por desenhar um esquema para melhor visualizar o problema.

Relembrar que a absorptância = emissividade.



### 16.1

Para calcular a potência total emitida pela superfície temos que calcular a potência emitida nas gamas do espectro definidos onde a emissividade não é zero. Aqui basta utilizar a tabela que indica a fração de potência emitida por um corpo negro e depois multiplicar pela emissividade respectiva.

Os nossos parâmetros são:

$$\begin{aligned}T_s &= 400\text{K} \\ \lambda_1 &= 0.5\mu\text{m} \\ \lambda_2 &= 1\mu\text{m} \\ \lambda_3 &= 2\mu\text{m} \\ \alpha_1 &= \varepsilon_1 = 0.8 \\ \alpha_2 &= \varepsilon_2 = 0.9\end{aligned}$$

Para utilizar a tabela temos que determinar os respectivos  $\lambda T$

$$\begin{aligned}\lambda_1 T_s &= 0.5\mu\text{m} \times 400\text{K} = 200\mu\text{m} \cdot \text{K} \\ \lambda_2 T_s &= 1\mu\text{m} \times 400\text{K} = 400\mu\text{m} \cdot \text{K} \\ \lambda_3 T_s &= 2\mu\text{m} \times 400\text{K} = 800\mu\text{m} \cdot \text{K}\end{aligned}$$

Ao consultar a tabela vemos que efetivamente a potência de emissão entre  $\lambda T = 0$  e  $\lambda T = 800\mu\text{m} \cdot \text{K}$  é irrelevante. Ou seja, toda a emissão só ocorre acima dos  $2\mu\text{m}$  para uma superfície cuja temperatura é de  $400\text{K}$ .

Neste caso podemos então utilizar diretamente a Lei de Stefan-Boltzmann:

## Série 1 – Resoluções

---

$$E = \varepsilon E_b = \varepsilon \sigma T^4$$

$$\varepsilon \cong \varepsilon_2 = 0.9$$

$$T = T_s = 400\text{K}$$

$$E_s = \varepsilon_s \sigma T_s^4$$

$$\begin{aligned} E_s &= 0.9 \times 5.67 \times 10^{-8} \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \text{K}^4} \times (400\text{K})^4 \\ &= 1306 \frac{\text{W}}{\text{m}^2} \end{aligned}$$

No entanto, se quisermos formalizar para mostrar que a emissividade global é igual à emissividade para comprimentos de onda superiores a  $\lambda > 2\mu\text{m}$  :

$$\begin{aligned} \varepsilon_s &= \frac{\int_0^{\infty} \varepsilon(\lambda) E_b(\lambda, T_s) d\lambda}{E_b} \\ &= \frac{\varepsilon_1 \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} E_b(\lambda, T_s) d\lambda}{E_b} + \frac{\varepsilon_2 \int_{\lambda_1}^{\lambda_3} E_b(\lambda, T_s) d\lambda}{E_b} \end{aligned}$$

$$\varepsilon_1 = 0.8$$

$$\varepsilon_2 = 0.9$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_s &= \varepsilon_1 F(0.5\mu\text{m} \rightarrow 1\mu\text{m}, 400\text{K}) + \varepsilon_2 F(2\mu\text{m} \rightarrow \infty, 400\text{K}) \\ &= \varepsilon_1 [F(0 \rightarrow 1\mu\text{m}, 400\text{K}) - (0 \rightarrow 0.5\mu\text{m}, 400\text{K})] + \varepsilon_2 [1 - F(2\mu\text{m}, 400\text{K})] \\ &= \varepsilon_1 [0 - 0] + \varepsilon_2 [1 - 0] \\ &= \varepsilon_2 = 0.9 \end{aligned}$$

## 16.2

Primeiro definimos os nossos valores. Vamos assumir que o espectro do Sol é a de um corpo negro a 5800K e portanto é o espectro que é incidente na nossa superfície.

$$G(\lambda) = E_b(\lambda, T_{\text{Sol}})$$

Como tal podemos calcular os respetivos  $\lambda T$

$$\begin{aligned} T_{\text{Sol}} &= 5800\text{K} \\ \lambda_1 T_{\text{Sol}} &= 0.5\mu\text{m} \times 5800\text{K} = 2900\mu\text{m} \cdot \text{K} \\ \lambda_2 T_{\text{Sol}} &= 1\mu\text{m} \times 5800\text{K} = 5800\mu\text{m} \cdot \text{K} \\ \lambda_3 T_{\text{Sol}} &= 2\mu\text{m} \times 5800\text{K} = 11600\mu\text{m} \cdot \text{K} \end{aligned}$$

E assim podemos consultar a tabela para obter as respetivas frações:

## Série 1 – Resoluções

---

$$F(0 \rightarrow 0.5\mu\text{m}, 400\text{ K}) = F(0 \rightarrow 2900\mu\text{m} \cdot \text{K}) = 0.250$$

$$F(0 \rightarrow 1\mu\text{m}, 400\text{ K}) = F(0 \rightarrow 5800\mu\text{m} \cdot \text{K}) = 0.720$$

$$F(0 \rightarrow 2\mu\text{m}, 400\text{ K}) = F(0 \rightarrow 11600\mu\text{m} \cdot \text{K}) = 0.941$$

Vemos que a emissão do Sol é significativa em todas as gamas do espectro.

Utilizando a definição de absortividade global:

$$\alpha = \frac{\int_0^{\infty} \alpha(\lambda) G(\lambda) d\lambda}{G}$$

Podemos calcular absortividade  $\alpha_s$  da nossa superfície:

$$G(\lambda) = E_b(\lambda, T_{\text{Sol}})$$

$$\alpha_s = \frac{\int_0^{\infty} \alpha(\lambda) E_b(\lambda, T_{\text{Sol}}) d\lambda}{E_b(T_{\text{Sol}})}$$

$$= \frac{\alpha_1 \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} E_b(\lambda, T_{\text{Sol}}) d\lambda}{E_b(T_{\text{Sol}})} + \frac{\alpha_2 \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} E_b(\lambda, T_{\text{Sol}}) d\lambda}{E_b(T_{\text{Sol}})}$$

$$\alpha_1 = \varepsilon_1 = 0.8$$

$$\alpha_2 = \varepsilon_2 = 0.9$$

$$\begin{aligned} \alpha_s &= \varepsilon_1 F(0.5\mu\text{m} \rightarrow 1\mu\text{m}, 5800\text{ K}) + \varepsilon_2 F(2\mu\text{m} \rightarrow \infty, 5800\text{ K}) \\ &= \varepsilon_1 [F(0 \rightarrow 1\mu\text{m}, 5800\text{ K}) - (0 \rightarrow 0.5\mu\text{m}, 5800\text{ K})] + \varepsilon_2 [1 - F(2\mu\text{m}, 5800\text{ K})] \\ &= 0.8[0.720 - 0.250] + 0.9[1 - 0.941] \\ &= 0.429 \end{aligned}$$

Com a absortância determinada, podemos agora determinar qual da potência incidente na nossa superfície é absorvida:

$$G_{\text{abs}} = \alpha_s G$$

$$G_s = 1200 \frac{\text{W}}{\text{m}^2}$$

$$G_{\text{abs}} = 0.429 \times 1200 \frac{\text{W}}{\text{m}^2}$$

$$= 515 \frac{\text{W}}{\text{m}^2}$$



## Série 1 – Resoluções

---

### 16.3

Por definição, a radiosidade é toda a radiação que vem da superfície, ou seja, é a soma da emissão devido à temperatura da superfície e a radiação que é refletida.

$$J = E + G_{\text{ref}}$$

Como a nossa superfície é opaca, a radiação incidente é absorvida ou refletida. Nenhuma é transmitida. Ou seja, como já temos a absortividade, podemos calcular a refletividade:

$$\begin{aligned}1 &= \alpha + \rho \\ \rho &= 1 - \alpha = 1 - 0.429 \\ &= 0.571\end{aligned}$$

Com a reflectância, podemos agora, a partir da radiação incidente, calcular a radiação refletida:

$$\begin{aligned}G_{\text{ref}} &= \rho G = (1 - \alpha)G \\ \rho &= 0.571 \\ G &= 1200 \frac{\text{W}}{\text{m}^2} \\ &= (1 - \alpha)G\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}G_{\text{ref}} &= 0.571 \times 1200 \frac{\text{W}}{\text{m}^2} \\ &= 685.2 \frac{\text{W}}{\text{m}^2}\end{aligned}$$

E assim já podemos calcular a radiosidade:

$$J = G_{\text{ref}} + E$$

$$\begin{aligned}J_S &= G_{\text{ref}} + E_S \\ G_{\text{ref}} &= 685.2 \frac{\text{W}}{\text{m}^2} \\ E_S &= 1306 \frac{\text{W}}{\text{m}^2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}J_S &= 685 \frac{\text{W}}{\text{m}^2} + 1306 \frac{\text{W}}{\text{m}^2} \\ &= 1991 \frac{\text{W}}{\text{m}^2}\end{aligned}$$

### 16.4

A troca de calor será a diferença entre o que é absorvido e o que é emitido pela superfície. Não esquecer que queremos o valor absoluto e, portanto, temos que multiplicar pela área da superfície.

## Série 1 – Resoluções

---

$$q_{\text{net}} = A(E - G_{\text{abs}})$$

$$q_{\text{net},S} = A_S(E_S - G_{\text{abs}})$$

$$A_S = 4\text{m}^2$$

$$E_S = 1306 \frac{\text{W}}{\text{m}^2}$$

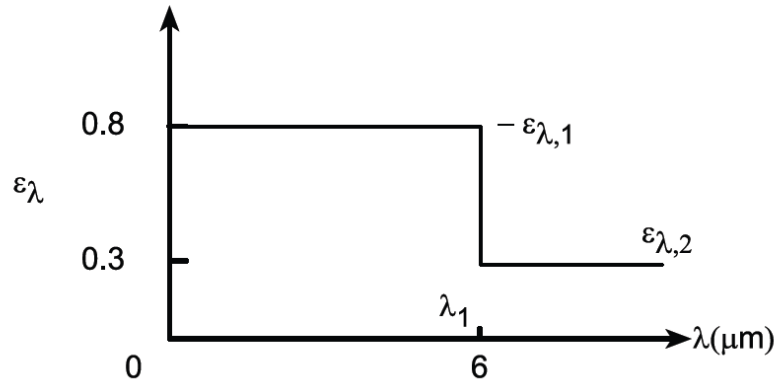
$$G_{\text{abs}} = 515 \frac{\text{W}}{\text{m}^2}$$

$$\begin{aligned} q_{\text{net},S} &= 4\text{m}^2 \times \left( 1306 \frac{\text{W}}{\text{m}^2} - 515 \frac{\text{W}}{\text{m}^2} \right) \\ &= 3164\text{W} \end{aligned}$$

Ou seja, a superfície está a perder calor.

## 17.1

A emissividade espectral da superfície está demonstrada na figura abaixo.



Temos duas gamas de comprimentos de onda, de 0 a  $6\mu\text{m}$  e de  $6\mu\text{m}$  a infinito. Portanto só teremos que identificar um valor da tabela para obter a fração abaixo dos  $6\mu\text{m}$  e a fração acima dos  $6\mu\text{m}$ .

Primeiro obtemos  $\lambda T$

$$T_s = 1000\text{K}$$

$$\lambda_1 T_s = 6\mu\text{m} \times 1000\text{K} = 6000\mu\text{m} \cdot \text{K}$$

Para depois consultar a tabela:

$$F(0 \rightarrow 6\mu\text{m}, 1000\text{K}) = F(0 \rightarrow 6000\mu\text{m} \cdot \text{K}) = 0.738$$

Podemos agora calcular a emissividade hemisférica total:

## Série 1 – Resoluções

---

$$\begin{aligned}\varepsilon_s &= \frac{\int_0^{\infty} \varepsilon_s(\lambda) E_b(\lambda, T_s) d\lambda}{E_b} \\ &= \frac{\varepsilon_1 \int_0^{\lambda_1} E_b(\lambda, T_s) d\lambda}{E_b} + \frac{\varepsilon_2 \int_{\lambda_1}^{\infty} E_b(\lambda, T_s) d\lambda}{E_b} \\ &= \varepsilon_1 F(0 \rightarrow \lambda_1, T_s) + \varepsilon_2 F(\lambda_1 \rightarrow \infty, T_s) \\ &= \varepsilon_1 F(0 \rightarrow \lambda_1, T_s) + \varepsilon_2 [1 - F(0 \rightarrow \lambda_1, T_s)]\end{aligned}$$

$$\lambda_1 = 6\mu\text{m}$$

$$\varepsilon_1 = 0.8$$

$$\varepsilon_2 = 0.3$$

$$\begin{aligned}\varepsilon_s &= \varepsilon_1 F(0 \rightarrow 6\mu\text{m}, 1000\text{ K}) + \varepsilon_2 F(6\mu\text{m} \rightarrow \infty, 1000\text{ K}) \\ &= \varepsilon_1 F(0 \rightarrow 6\mu\text{m}, 1000\text{ K}) + \varepsilon_2 [1 - F(6\mu\text{m}, 1000\text{ K})] \\ &= 0.8[0.7380] + 0.3[1 - 0.738] \\ &= 0.669\end{aligned}$$

### 17.2

A nossa superfície estando imersa num meio, a emissividade desse meio não afeta a potência de emissão, por comportar-se como uma cavidade e, portanto, o espectro de emissão será a de um corpo negro.

Voltando à definição de absorptância:

$$\alpha = \frac{\int_0^{\infty} \alpha(\lambda) G(\lambda) d\lambda}{G}$$

E para o nosso caso específico a radiação incidente na nossa superfície é a de um corpo negro:

$$G_s(\lambda) = E_b(\lambda, T_{\text{sur}})$$

A absorptância total hemisférica será:

$$\alpha_s = \frac{\alpha_1 \int_0^{\lambda_1} E_b(\lambda, T_{\text{sur}}) d\lambda}{E_b(T_{\text{sur}})} + \frac{\alpha_2 \int_{\lambda_1}^{\infty} E_b(\lambda, T_{\text{sur}}) d\lambda}{E_b(T_{\text{sur}})}$$

E já devemos saber que a absorptância espectral é igual à emissividade espectral podemos escrever:

## Série 1 – Resoluções

---

$$\alpha_1 = \varepsilon_1 = 0.8$$

$$\alpha_2 = \varepsilon_2 = 0.3$$

$$\begin{aligned}\alpha_S &= \frac{\varepsilon_1 \int_0^{\lambda_1} E_b(\lambda, T_{\text{sur}}) d\lambda}{E_b(T_{\text{sur}})} + \frac{\varepsilon_2 \int_{\lambda_1}^{\infty} E_b(\lambda, T_{\text{sur}}) d\lambda}{E_b(T_{\text{sur}})} \\ &= \varepsilon_1 F(0 \rightarrow \lambda_1, T_{\text{sur}}) + \varepsilon_2 F(\lambda_1 \rightarrow \infty, T_{\text{sur}}) \\ &= \varepsilon_1 F(0 \rightarrow \lambda_1, T_{\text{sur}}) + \varepsilon_2 [1 - F(0 \rightarrow \lambda_1, T_{\text{sur}})]\end{aligned}$$

Como a temperatura circundante  $T_{\text{sur}}$  à nossa superfície é diferente, temos que de novo avaliar  $\lambda T$ :

$$T_{\text{sur}} = 1500\text{K}$$

$$\varepsilon_{\text{sur}} = 0.8$$

$$\lambda_1 T_{\text{sur}} = 6\mu\text{m} \times 1500\text{K} = 9000\mu\text{m} \cdot \text{K}$$

$$F(0 \rightarrow 6\mu\text{m}, 1500\text{K}) = F(0 \rightarrow 9000\mu\text{m} \cdot \text{K}) = 0.890$$

Podemos assim agora calcular a absorptância total hemisférica:

$$\begin{aligned}\alpha_S &= \varepsilon_1 F(0 \rightarrow 6\mu\text{m}, 1500\text{K}) + \varepsilon_2 F(6\mu\text{m} \rightarrow \infty, 1500\text{K}) \\ &= \varepsilon_1 F(0 \rightarrow 6\mu\text{m}, 1500\text{K}) + \varepsilon_2 [1 - F(0 \rightarrow 6\mu\text{m}, 1500\text{K})] \\ &= 0.8[0.890] + 0.3[1 - 0.890] \\ &= 0.745\end{aligned}$$

Reparem que a absorptância é superior à emissividade. Isto é porque a absorptância espectral é superior para comprimentos de onda mais curtos. Como o espectro de radiação sobre a superfície é a uma temperatura superior ao espectro de emissão da superfície, a superfície irá absorver radiação a comprimentos de onda mais curtos melhor do que emite a comprimentos mais longos.

### 17.3

Para calcular a radiosidade, precisamos de saber qual a potência refletida e emitida pela superfície em questão. Isto é possível por já termos a absorptância total hemisférica para a radiação incidente e a emissividade total hemisférica devido à temperatura da superfície.

A radiação refletida é:

## Série 1 – Resoluções

---

$$G_{\text{ref}} = \rho G$$

$$\rho = 1 - \alpha$$

$$\alpha_s = 0.745$$

$$\begin{aligned}\rho_s &= 1 - 0.745 \\ &= 0.255\end{aligned}$$

$$G = E_{\text{sur}}(T_{\text{sur}}) = \sigma T_{\text{sur}}^4$$

$$T_{\text{sur}} = 1500\text{K}$$

$$\begin{aligned}G &= 5.67 \times 10^{-8} \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \text{K}^4} \times (1500\text{K})^4 \\ &= 287044 \frac{\text{W}}{\text{m}^2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}G_{\text{ref}} &= 0.255 \times 287044 \frac{\text{W}}{\text{m}^2} \\ &= 73196 \frac{\text{W}}{\text{m}^2}\end{aligned}$$

A radiação emitida pela superfície é:

$$E_s = \varepsilon_s \sigma T_s^4$$

$$\varepsilon_s = 0.669$$

$$T_s = 1000\text{K}$$

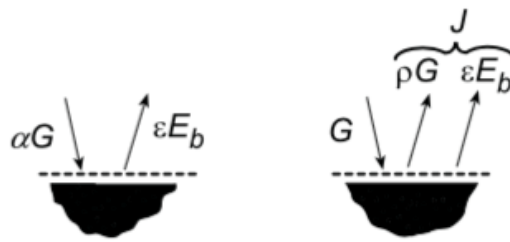
$$\begin{aligned}E_s &= 0.669 \times 5.67 \times 10^{-8} \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \text{K}^4} \times (1000\text{K})^4 \\ &= 37932 \frac{\text{W}}{\text{m}^2}\end{aligned}$$

A radiosidade é portanto:

$$\begin{aligned}J_s &= E_s + G_{\text{ref}} \\ &= 37932 \frac{\text{W}}{\text{m}^2} + 73196 \frac{\text{W}}{\text{m}^2} \\ &= 111128 \frac{\text{W}}{\text{m}^2}\end{aligned}$$

## Série 1 – Resoluções

17.4



O fluxo de radiação será a diferença entre o que é absorvido  $G_{\text{abs}}$  e emitido  $E_s$  pela superfície. É também a diferença entre a radiação incidente e a radiosidade.

$$q_{\text{net},S} = G_{\text{abs}} - E_s$$

$$G_{\text{abs}} = \alpha G$$

$$\alpha_s = 0.745$$

$$G = 287044 \frac{\text{W}}{\text{m}^2}$$

$$\begin{aligned} G_{\text{abs}} &= 0.745 \times 287044 \frac{\text{W}}{\text{m}^2} \\ &= 213847 \frac{\text{W}}{\text{m}^2} \end{aligned}$$

$$E_s = 37932 \frac{\text{W}}{\text{m}^2}$$

$$\begin{aligned} q_{\text{net},S} &= G_{\text{abs}} - E_s \\ &= 175915 \frac{\text{W}}{\text{m}^2} \end{aligned}$$

Ou diferença entre a radiação incidente e a radiosidade:

$$q_{\text{net},S} = G - J_s$$

$$G = 287044 \frac{\text{W}}{\text{m}^2}$$

$$J_s = 111128 \frac{\text{W}}{\text{m}^2}$$

$$\begin{aligned} q_{\text{net},S} &= 287044 \frac{\text{W}}{\text{m}^2} - 111128 \frac{\text{W}}{\text{m}^2} \\ &= 175915 \frac{\text{W}}{\text{m}^2} \end{aligned}$$

## Série 1 – Resoluções

---

$$q_{rad,in} = G - J$$

$$\begin{aligned} J &= \rho G + \varepsilon E_b \\ &= (1 - \alpha)G + \varepsilon E_b \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore q_{rad,in} &= G - (1 - \alpha)G + \varepsilon E_b \\ &= \alpha G + \varepsilon E_b \end{aligned}$$

$$q_{rad,in} = G - J$$

$$\begin{aligned} G &= \sigma T_{sur}^4 \\ &= 5.67 \times 10^{-8} \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \text{K}^4} \times (1500\text{K})^4 \\ J &= 111000 \frac{\text{W}}{\text{m}^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} q_{rad,in} &= G - J \\ &= 5.67 \times 10^{-8} \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \text{K}^4} \times (1500\text{K})^4 - 111000 \frac{\text{W}}{\text{m}^2} \\ &= 175900 \frac{\text{W}}{\text{m}^2} \end{aligned}$$



### 18.1

A radiação incidente na direção normal da superfície  $G_n$  é o produto da radiação incidente  $G$ , a transmissividade  $T$  da cúpula e a correção devido à direção da radiação (reparar que na pergunta o ângulo dado não é relativo à normal da superfície recetora, mas sim ao horizontal da superfície).

Para começar, o ângulo de incidência relativo à direção normal da superfície é:

$$\theta_i = 90 - \theta$$

$$\theta = 55^\circ$$

$$\theta_i = 90 - 55^\circ$$

$$= 35^\circ$$

A radiação incidente sobre a superfície é portanto:

$$G_n = TG \cos(\theta_i)$$

$$T = 0.9$$

$$G = 600 \frac{\text{W}}{\text{m}^2}$$

$$G_n = 0.9 \times 600 \frac{\text{W}}{\text{m}^2} \cos(35^\circ)$$

$$= 442 \frac{\text{W}}{\text{m}^2}$$

$$= 44.2 \frac{\text{mW}}{\text{cm}^2}$$

A radiação absorvida para cada quadrado é:

$$q_{\text{rad,in}} = \alpha G_n$$

E como temos dois tipos de superfície, preto e branco, temos duas absorptâncias:

$$\alpha_b = 0.9, \text{ b=black}$$

$$\alpha_w = 0.1, \text{ w=white}$$

Ou seja a radiação absorvida para os dois tipos de superfícies é:

## Série 1 – Resoluções

---

$$q_{\text{rad,in,b}} = A\alpha_b G_n$$

$$q_{\text{rad,in,w}} = A\alpha_w G_n$$

$$A = 1\text{cm}^2$$

$$\begin{aligned} q_{\text{rad,in,b}} &= 1\text{cm}^2 \times 0.9 \times 44.2 \frac{\text{mW}}{\text{cm}^2} \\ &= 39.8\text{mW} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} q_{\text{rad,in,w}} &= 1\text{cm}^2 \times 0.1 \times 44.2 \frac{\text{mW}}{\text{cm}^2} \\ &= 4.0\text{mW} \end{aligned}$$

A radiação total absorvida será a soma das radiações absorvidas por cada um dos quadrados. Temos 4 quadrados brancos e 5 quadrados pretos, e assim:

$$q_{\text{rad,in}} = n_b q_{\text{rad,in,b}} + n_w q_{\text{rad,in,w}}$$

$$n_b = 5$$

$$n_w = 4$$

$$\begin{aligned} q_{\text{rad,in}} &= 5 \times 39.8\text{mW} + 4 \times 4.0\text{mW} \\ &= 215\text{mW} \end{aligned}$$

### 18.2

Em equilíbrio, a troca de calor é nula. Aqui vamos assumir que a troca de calor é toda radiativa. Assim, a radiação incidente tem de ser igual à radiosidade, ou a radiação absorvida tem que ser igual à radiação emitida.

$$q_{\text{net}} = G - J = G_{\text{abs}} - E$$

$$q_{\text{net,b}} = 0 = G_{\text{abs}} - E_b(T_b)$$

$$G_{\text{abs}} = E_b(T_b)$$

Como já sabemos a potência de radiação absorvida:

$$G_{\text{abs}} = 39.8 \frac{\text{mW}}{\text{cm}^2} = 398 \frac{\text{W}}{\text{m}^2}$$

Temos, portanto, a potência de emissão:

$$E_b(T_b) = 398 \frac{\text{W}}{\text{m}^2}$$

E esta potência de emissão é dada pela Lei de Stefan-Boltzmann (aqui o subscrito **b**) refer-se não a um corpo negro, mas sim a superfície preta/*black*):

$$E_b(T_b) = \varepsilon_b \sigma T_b^4$$

## Série 1 – Resoluções

---

E, portanto, já podemos encontrar a temperatura de equilíbrio:

$$\begin{aligned}T_b &= \sqrt[4]{\frac{E_b(T_b)}{\varepsilon_b \sigma}} \\&= \sqrt[4]{\frac{398 \frac{\text{W}}{\text{m}^2}}{0.9 \times 5.67 \times 5.67 \times 10^{-8} \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \text{K}^4}}} \\&= 297\text{K} = 24^\circ\text{C}\end{aligned}$$

### 18.3

Para os cubos brancos, a temperatura de equilíbrio será encontrada da mesma forma. Notem que a potência absorvida é menor, e, portanto, a potência emitida será menor também.

$$\begin{aligned}q_{\text{net}} &= G - J = G_{\text{abs}} - E \\q_{\text{net,w}} &= 0 = G_{\text{abs}} - E_w(T_w) \\G_{\text{abs,w}} &= E_w(T_w) \\G_{\text{abs,w}} &= 4.0 \frac{\text{mW}}{\text{cm}^2} = 40 \frac{\text{W}}{\text{m}^2} \\E_w(T_w) &= \varepsilon_w \sigma T_w^4 \\T_w &= \sqrt[4]{\frac{E_b(T_b)}{\varepsilon_w \sigma}} \\&= \sqrt[4]{\frac{40 \frac{\text{W}}{\text{m}^2}}{0.1 \times 5.67 \times 5.67 \times 10^{-8} \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \text{K}^4}}} \\&= 297\text{K} = 24^\circ\text{C}\end{aligned}$$

A temperatura é mesma!

-FIM-